8-2. Степень вхождения. 19 января

Определение. *Степенью вхождения* простого числа p в целое число n называется наибольшее целое s такое, что $n \mathrel{\vdots} p^s$, т.е. степень вхождения это такое число s, что $n \mathrel{\vdots} p^s$ и $n \not\mathrel{\vdots} p^{s+1}$. **Обозначение.** $v_p(n)$.

Другими словами, если $n = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — разложение числа n на простые множители, то $s = 0$, если p нет среди чисел p_i, и $s = s_i$, если $p = p_i$.

1. Пусть p — простое, $v_p(a) = \alpha$, $v_p(b) = \beta$.
a) Чему равняется $v_p(ab)$? $v_p(\text{НОД}(a, b))$? $v_p(\text{НОК}(a, b))$?
b) Пусть $\alpha < \beta$. Чему равняется $v_p(a + b)$?
c) Пусть $\alpha = \beta$. Чему может равняться $v_p(a + b)$?

2. Даны три натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных двух. Наименьшее общее кратное каждых двух из данных чисел делится на оставшееся третье. Докажите, что все числа равны.

3. Докажите, что если числа ab, cd и $ac + bd$ делятся на k, то ac и bd тоже делятся на k.

4. Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

5. Пусть A — множество из N натуральных чисел, больших 1 и взаимно простых в совокупности. Известно, что произведение любых двух чисел из A делится на любое из оставшихся. Докажите, что произведение всех чисел из A — точная $(N-1)$-я степень.

6. Натуральные взаимно простые в совокупности a, b, c таковы, что $ab = c(a - b)$. Докажите, что $a - b$ — точный квадрат.

7. Докажите, что для любых нечётных натуральных a, b, c выполнено равенство $\text{НОД}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right) = \text{НОД}(a, b, c)$.

«Сириус», январская математическая программа – 2021, 8 класс

8-2. Степень вхождения. 19 января

Определение. *Степенью вхождения* простого числа p в целое число n называется наибольшее целое s такое, что $n \mathrel{\vdots} p^s$, т.е. степень вхождения это такое число s, что $n \mathrel{\vdots} p^s$ и $n \not\mathrel{\vdots} p^{s+1}$. **Обозначение.** $v_p(n)$.

Другими словами, если $n = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — разложение числа n на простые множители, то $s = 0$, если p нет среди чисел p_i, и $s = s_i$, если $p = p_i$.

1. Пусть p — простое, $v_p(a) = \alpha$, $v_p(b) = \beta$.
a) Чему равняется $v_p(ab)$? $v_p(\text{НОД}(a, b))$? $v_p(\text{НОК}(a, b))$?
b) Пусть $\alpha < \beta$. Чему равняется $v_p(a + b)$?
c) Пусть $\alpha = \beta$. Чему может равняться $v_p(a + b)$?

2. Даны три натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных двух. Наименьшее общее кратное каждых двух из данных чисел делится на оставшееся третье. Докажите, что все числа равны.

3. Докажите, что если числа ab, cd и $ac + bd$ делятся на k, то ac и bd тоже делятся на k.

4. Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

5. Пусть A — множество из N натуральных чисел, больших 1 и взаимно простых в совокупности. Известно, что произведение любых двух чисел из A делится на любое из оставшихся. Докажите, что произведение всех чисел из A — точная $(N-1)$-я степень.

6. Натуральные взаимно простые в совокупности a, b, c таковы, что $ab = c(a - b)$. Докажите, что $a - b$ — точный квадрат.

7. Докажите, что для любых нечётных натуральных a, b, c выполнено равенство $\text{НОД}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right) = \text{НОД}(a, b, c)$.