8-2. НОД и НОК: неравенства. 21 января

1. Даны натуральные числа $a > b$. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) \leqslant a - b$.

2. Натуральные a и b таковы, что $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ — целое. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) \leqslant \sqrt{a+b}$.

3. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Могла ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, записанных на рёбрах?

4. Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Докажите, что $\text{НОК}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant n \cdot a_1$.

5. Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Докажите, что

$$\frac{1}{\text{НОК}(a_1, a_2)} + \frac{1}{\text{НОК}(a_2, a_3)} + \ldots + \frac{1}{\text{НОК}(a_{n-1}, a_n)} < 1.$$

Комментарий. Кроме того, неравенства помогают решить задачу 4 из темы «Большие выражения», задачу 6 из «Конструкции в теории чисел», задачу 4 из темы «НОД и НОК».

«Сириус», январская математическая программа – 2021, 8 класс

8-2. НОД и НОК: неравенства. 21 января

1. Даны натуральные числа $a > b$. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) \leqslant a - b$.

2. Натуральные a и b таковы, что $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ — целое. Докажите, что $\text{НОД}(a, b) \leqslant \sqrt{a+b}$.

3. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Могла ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, записанных на рёбрах?

4. Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Докажите, что $\text{НОК}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant n \cdot a_1$.

5. Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Докажите, что

$$\frac{1}{\text{НОК}(a_1, a_2)} + \frac{1}{\text{НОК}(a_2, a_3)} + \ldots + \frac{1}{\text{НОК}(a_{n-1}, a_n)} < 1.$$

Комментарий. Кроме того, неравенства помогают решить задачу 4 из темы «Большие выражения», задачу 6 из «Конструкции в теории чисел», задачу 4 из темы «НОД и НОК».