

1. Разнобой по алгебре. 5 июня

1. Пусть $1 < x < y < z$ — действительные числа. Какое из следующих выражений наибольшее, а какое — наименьшее: $x + yz$, $y + zx$, $z + xy$?

2. Докажите, что если $a + b + c = 0$ и числа a, b, c отличны от нуля, то

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}.$$

3. В строчку выписаны 100 чисел. Каждое число, начиная со второго, не меньше предыдущего; сумма всех чисел равна 10; сумма любых 30 чисел не меньше 2. Какое наименьшее число может стоять на 96 месте?

4. Натуральное число n выбрано между двумя квадратами последовательных натуральных чисел, причем меньший из этих квадратов меньше n ровно на s , а больший — больше n ровно на t . Докажите, что число $n - st$ — квадрат целого числа.

5. Решите в различных натуральных числах уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^2.$$

6. Рассмотрим числа

$$a = \frac{1}{20^2} + \frac{1}{21^2} + \dots + \frac{1}{39^2} \text{ и } b = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{19^2}.$$

Докажите, что $b < 3a$.

7. Среди чисел $1, 2, \dots, 2n$ выбрали n чисел так, что никакие два выбранных числа не дают в сумме $2n+1$. Оказалось, что сумма выбранных чисел равна $\frac{n(2n+1)}{2}$. Найдите сумму их квадратов.

1. Разнобой по алгебре. 5 июня

1. Пусть $1 < x < y < z$ — действительные числа. Какое из следующих выражений наибольшее, а какое — наименьшее: $x + yz$, $y + zx$, $z + xy$?

2. Докажите, что если $a + b + c = 0$ и числа a, b, c отличны от нуля, то

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}.$$

3. В строчку выписаны 100 чисел. Каждое число, начиная со второго, не меньше предыдущего; сумма всех чисел равна 10; сумма любых 30 чисел не меньше 2. Какое наименьшее число может стоять на 96 месте?

4. Натуральное число n выбрано между двумя квадратами последовательных натуральных чисел, причем меньший из этих квадратов меньше n ровно на s , а больший — больше n ровно на t . Докажите, что число $n - st$ — квадрат целого числа.

5. Решите в различных натуральных числах уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^2.$$

6. Рассмотрим числа

$$a = \frac{1}{20^2} + \frac{1}{21^2} + \dots + \frac{1}{39^2} \text{ и } b = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{19^2}.$$

Докажите, что $b < 3a$.

7. Среди чисел $1, 2, \dots, 2n$ выбрали n чисел так, что никакие два выбранных числа не дают в сумме $2n+1$. Оказалось, что сумма выбранных чисел равна $\frac{n(2n+1)}{2}$. Найдите сумму их квадратов.