

4. Разнобой по теории чисел. 6 июня

1. Неполное частное, которое получилось при делении некоторого натурального числа на 7, делится на 13. Докажите, что тогда неполное частное, которое получилось при делении того же числа на 13, делится на 7.

2. Вася задумал трехзначное натуральное число. Он посчитал остатки при делении этого числа на 2, 4, 6, 8, 10, 12 и сложил их. У него получилось 36. Какое число мог задумать Вася?

3. Докажите, что если числа ab , cd и $ac + bd$ делятся на k , то ac и bd тоже делятся на k (a, b, c, d, k — натуральные числа)

4. Натуральные числа a, b и c таковы, что число $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что как минимум два из чисел a^3, b^3, c^3 дают одинаковые остатки при делении на $a + b + c$.

5. Некоторая степень числа 2 состоит из 333 335 цифр. Её разрезали на 66 667 блоков по пять цифр подряд. Докажите, что среди этих блоков не встречается хотя бы одно из чисел от 22 222 до 88 888.

6. Число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{555}$ записано в виде несократимой дроби. На сколько нулей оканчивается знаменатель этой дроби?

7. В бесконечной последовательности $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ натуральных чисел $\text{НОД}(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$ при всех натуральных i . Докажите, что при всех натуральных n выполнено $a_n \geq 2^n$.

4. Разнобой по теории чисел. 6 июня

1. Неполное частное, которое получилось при делении некоторого натурального числа на 7, делится на 13. Докажите, что тогда неполное частное, которое получилось при делении того же числа на 13, делится на 7.

2. Вася задумал трехзначное натуральное число. Он посчитал остатки при делении этого числа на 2, 4, 6, 8, 10, 12 и сложил их. У него получилось 36. Какое число мог задумать Вася?

3. Докажите, что если числа ab , cd и $ac + bd$ делятся на k , то ac и bd тоже делятся на k (a, b, c, d, k — натуральные числа)

4. Натуральные числа a, b и c таковы, что число $a^2 + b^2 + c^2$ делится на $a + b + c$. Докажите, что как минимум два из чисел a^3, b^3, c^3 дают одинаковые остатки при делении на $a + b + c$.

5. Некоторая степень числа 2 состоит из 333 335 цифр. Её разрезали на 66 667 блоков по пять цифр подряд. Докажите, что среди этих блоков не встречается хотя бы одно из чисел от 22 222 до 88 888.

6. Число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{555}$ записано в виде несократимой дроби. На сколько нулей оканчивается знаменатель этой дроби?

7. В бесконечной последовательности $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ натуральных чисел $\text{НОД}(a_i, a_{i+1}) > a_{i-1}$ при всех натуральных i . Докажите, что при всех натуральных n выполнено $a_n \geq 2^n$.