5. Разнобой по клеткам. 6 июня

1. Клетчатый квадрат 9×9 разбит на прямоугольники 1×3. У каждого из прямоугольников отмечена точка пересечения диагоналей. Докажите, что из отмеченных точек можно выбрать такие четыре, которые лежат на одной прямой.

2. На доске 300×300 расставлены ладьи, они бьют всю доску. Известно, что каждая ладья бьет не более чем одну другую ладью. При каком наименьшем k в каждом квадрате $k\times k$ обязательно стоит хотя бы одна ладья?

3. В каждой клетке таблицы $n\times n$ стоит некая буква. Известно, что все строки таблицы различны. Докажите, что в ней можно стереть столбец так, что после стирания столбца все строки таблицы останутся различны.

4. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером 102×102 клетки и связная фигура неизвестной формы, состоящая из 101 клетки. Какое наибольшее число таких фигур можно с гарантией вырезать из этого квадрата? Фигура, составленная из клеток, называется связной, если любые две ее клетки можно соединить цепочкой её клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.

5. В прямоугольнике $m\times n$ расставлены числа от 1 до m так, что каждое из них встречается ровно n раз. Докажите, что можно осуществить такую перестановку в каждой строчке, чтобы все числа встречались по одному в каждом столбце.

6. При каких натуральных m и n клетки прямоугольника $m\times n$ можно раскрасить в два цвета так, чтобы у каждой клетки было нечетное число соседних (т.е. имеющих с ней хотя бы одну общую вершину) клеток того же цвета?

7. Прямоугольную таблицу $m\times n$ $(4\leqslant m\leqslant n)$ назовем *хорошей*, если в каждую ее клетку можно вписать число 0 или 1 так, чтобы одновременно выполнялись условия:
1) не все вписанные числа равны 0 и не все равны 1;
2) число единиц во всех квадратах 3×3 одно и то же;
3) число единиц во всех квадратах 4×4 одно и то же.
Найдите все пары натуральных чисел (m,n), для которых существует хорошая таблица $m\times n$.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2

5. Разнобой по клеткам. 6 июня

1. Клетчатый квадрат 9×9 разбит на прямоугольники 1×3. У каждого из прямоугольников отмечена точка пересечения диагоналей. Докажите, что из отмеченных точек можно выбрать такие четыре, которые лежат на одной прямой.

2. На доске 300×300 расставлены ладьи, они бьют всю доску. Известно, что каждая ладья бьет не более чем одну другую ладью. При каком наименьшем k в каждом квадрате $k\times k$ обязательно стоит хотя бы одна ладья?

3. В каждой клетке таблицы $n\times n$ стоит некая буква. Известно, что все строки таблицы различны. Докажите, что в ней можно стереть столбец так, что после стирания столбца все строки таблицы останутся различны.

4. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером 102×102 клетки и связная фигура неизвестной формы, состоящая из 101 клетки. Какое наибольшее число таких фигур можно с гарантией вырезать из этого квадрата? Фигура, составленная из клеток, называется связной, если любые две ее клетки можно соединить цепочкой её клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.

5. В прямоугольнике $m\times n$ расставлены числа от 1 до m так, что каждое из них встречается ровно n раз. Докажите, что можно осуществить такую перестановку в каждой строчке, чтобы все числа встречались по одному в каждом столбце.

6. При каких натуральных m и n клетки прямоугольника $m\times n$ можно раскрасить в два цвета так, чтобы у каждой клетки было нечетное число соседних (т.е. имеющих с ней хотя бы одну общую вершину) клеток того же цвета?

7. Прямоугольную таблицу $m\times n$ $(4\leqslant m\leqslant n)$ назовем *хорошей*, если в каждую ее клетку можно вписать число 0 или 1 так, чтобы одновременно выполнялись условия:
1) не все вписанные числа равны 0 и не все равны 1;
2) число единиц во всех квадратах 3×3 одно и то же;
3) число единиц во всех квадратах 4×4 одно и то же.
Найдите все пары натуральных чисел (m,n), для которых существует хорошая таблица $m\times n$.