

8. Ещё одна точка. 8 июня

1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL и высота CH . HD и HE — биссектрисы треугольников AHC и CHB . Докажите, что точки D , H , E и L лежат на одной окружности.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Докажите, что точки A , A_1 и середины отрезков BC_1 и CB_1 лежат на одной окружности.

3. На плоскости дана окружность ω и точка P . Через точку P проведены четыре прямые, каждая из которых пересекает ω . Докажите, что середины образовавшихся хорд лежат на одной окружности.

4. К окружности проведены касательные в точках A и B , пересекающиеся в точке P . Через точку P проведена секущая, пересекающая окружность в точках K и L . Пусть M — середина хорды KL .

а) Докажите, что точки P , A , B , M лежат на одной окружности.

б) Через точку A проведена хорда AE параллельно KL . Докажите, что BE проходит через M .

5. Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины высот AA_1 , BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC . Найдите сумму углов $B_2A_1C_2$, $C_2B_1A_2$ и $A_2C_1B_2$.

6. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на описанной окружности треугольника ACM , а точка пересечения медиан треугольника ACM лежит на описанной окружности треугольника ABM . Докажите, что медианы треугольников ABM и ACM из вершины M равны.

7. На высотах AA_1 , BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC взяты точки A_2 , B_2 , C_2 , отличные от точки пересечения высот H , причем сумма площадей треугольников ABC_2 , BCA_2 , CAB_2 равна площади треугольника ABC . Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_2B_2C_2$, проходит через точку H .

8. Ещё одна точка. 8 июня

1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL и высота CH . HD и HE — биссектрисы треугольников AHC и CHB . Докажите, что точки D , H , E и L лежат на одной окружности.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Докажите, что точки A , A_1 и середины отрезков BC_1 и CB_1 лежат на одной окружности.

3. На плоскости дана окружность ω и точка P . Через точку P проведены четыре прямые, каждая из которых пересекает ω . Докажите, что середины образовавшихся хорд лежат на одной окружности.

4. К окружности проведены касательные в точках A и B , пересекающиеся в точке P . Через точку P проведена секущая, пересекающая окружность в точках K и L . Пусть M — середина хорды KL .

а) Докажите, что точки P , A , B , M лежат на одной окружности.

б) Через точку A проведена хорда AE параллельно KL . Докажите, что BE проходит через M .

5. Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины высот AA_1 , BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC . Найдите сумму углов $B_2A_1C_2$, $C_2B_1A_2$ и $A_2C_1B_2$.

6. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на описанной окружности треугольника ACM , а точка пересечения медиан треугольника ACM лежит на описанной окружности треугольника ABM . Докажите, что медианы треугольников ABM и ACM из вершины M равны.

7. На высотах AA_1 , BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC взяты точки A_2 , B_2 , C_2 , отличные от точки пересечения высот H , причем сумма площадей треугольников ABC_2 , BCA_2 , CAB_2 равна площади треугольника ABC . Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_2B_2C_2$, проходит через точку H .