11. Комбинаторная геометрия. 9 июня

1. Бильярдный стол имеет форму многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого соседние стороны перпендикулярны друг другу. Вершины этого многоугольника — лузы, при попадании в которые шар там и остаётся. Из вершины с (внутренним) углом в 90° выпущен шар, который отражается от бортов (сторон многоугольника) по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что шар в эту вершину никогда не вернётся.

2. Назовем треугольник α–ограниченным, если все его углы не превосходят α градусов. Найдите наименьшее α, для которого любой треугольник можно разрезать на несколько (возможно один) α–ограниченных треугольников.

3. В выпуклом 105–угольнике провели все диагонали. Докажите, что среди частей, на которые он разбился, не менее 10500 тупоугольных треугольников.

4. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать непересекающимися по внутренним точкам диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.

5. На плоскости расположено несколько одинаковых кругов. Любые два круга имеют не более одной общей точки. Всегда ли эти круги можно раскрасить в 3 цвета таким образом, чтобы одноцветные круги не касались?

6. В правильном n-угольнике $A_1A_2 \ldots A_n$ провели диагонали A_1A_{m+1}, A_2A_{m+2}, ..., A_nA_m ($m \neq n/2$ — данное натуральное число). Докажите, что никакие три из этих диагоналей не пересекаются в одной точке.

7. Докажите, что любой многоугольник можно разрезать непересекающимися по внутренним точкам диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2

11. Комбинаторная геометрия. 9 июня

1. Бильярдный стол имеет форму многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого соседние стороны перпендикулярны друг другу. Вершины этого многоугольника — лузы, при попадании в которые шар там и остаётся. Из вершины с (внутренним) углом в 90° выпущен шар, который отражается от бортов (сторон многоугольника) по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что шар в эту вершину никогда не вернётся.

2. Назовем треугольник α–ограниченным, если все его углы не превосходят α градусов. Найдите наименьшее α, для которого любой треугольник можно разрезать на несколько (возможно один) α–ограниченных треугольников.

3. В выпуклом 105–угольнике провели все диагонали. Докажите, что среди частей, на которые он разбился, не менее 10500 тупоугольных треугольников.

4. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать непересекающимися по внутренним точкам диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.

5. На плоскости расположено несколько одинаковых кругов. Любые два круга имеют не более одной общей точки. Всегда ли эти круги можно раскрасить в 3 цвета таким образом, чтобы одноцветные круги не касались?

6. В правильном n-угольнике $A_1A_2 \ldots A_n$ провели диагонали A_1A_{m+1}, A_2A_{m+2}, ..., A_nA_m ($m \neq n/2$ — данное натуральное число). Докажите, что никакие три из этих диагоналей не пересекаются в одной точке.

7. Докажите, что любой многоугольник можно разрезать непересекающимися по внутренним точкам диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.