12. Антипараллельность. 11 июня

Определение. Пусть точки B_1 и C_1 лежат на прямых AB и AC, причём A или внутри обоих отрезков BB_1 и CC_1, или вне обоих. Будем говорить, что прямые B_1C_1 и BC *антипараллельны* относительно пары прямых AB и AC (или относительно угла BAC), если $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$.

Утверждение 1. Отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда B_1, C_1, B и C лежат на одной окружности. Что происходит в случае, когда $C \approx C_1$ или $B \approx B_1$?

Утверждение 2. Отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда B_1C_1 параллелен касательной к описанной окружности треугольника ABC в точке A.

Утверждение 3. Отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда треугольники ABC и AC_1B_1 подобны. Иначе говоря, один из этих треугольников можно перевести в другой, выполнив симметрию относительно биссектрисы угла A и затем гомотетию с центром в точке A.

---

1. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты, а AA_2 и BB_2 — биссектрисы треугольника ABC. Известно, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Докажите, что $AC = BC$.

2. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Прямые A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке X, а прямые A_3A_5 и A_1A_6 — в точке Y. Докажите, что прямые A_1A_2 и XY параллельны.

3. Пусть $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$. Докажите, что описанная окружность треугольника ABD касается прямой CD тогда и только тогда, когда описанная окружность треугольника BCD касается прямой AB.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Прямая A_1B_1 пересекает описанную окружность Ω треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что $CP = CQ$.

5. Высоты AA_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. H_A — точка симметричная H относительно A. H_AC_1 пересекает прямую BC в точке C_2; аналогично определяется точка A_2. Докажите, что $A_2C_2 \parallel AC$.

Не забудьте перевернуть листочек!

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2

12. Антипараллельность. 11 июня

Определение. Пусть точки B_1 и C_1 лежат на прямых AB и AC, причём A или внутри обоих отрезков BB_1 и CC_1, или вне обоих. Будем говорить, что прямые B_1C_1 и BC *антипараллельны* относительно пары прямых AB и AC (или относительно угла BAC), если $\angle AC_1B_1 = \angle ABC$.

Утверждение 1. Отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда B_1, C_1, B и C лежат на одной окружности. Что происходит в случае, когда $C \approx C_1$ или $B \approx B_1$?

Утверждение 2. Отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда B_1C_1 параллелен касательной к описанной окружности треугольника ABC в точке A.

Утверждение 3. Отрезки BC и B_1C_1 антипараллельны тогда и только тогда, когда треугольники ABC и AC_1B_1 подобны. Иначе говоря, один из этих треугольников можно перевести в другой, выполнив симметрию относительно биссектрисы угла A и затем гомотетию с центром в точке A.

1. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты, а AA_2 и BB_2 — биссектрисы треугольника ABC. Известно, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Докажите, что $AC = BC$.

2. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Прямые A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке X, а прямые A_3A_5 и A_1A_6 — в точке Y. Докажите, что прямые A_1A_2 и XY параллельны.

3. Пусть $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$. Докажите, что описанная окружность треугольника ABD касается прямой CD тогда и только тогда, когда описанная окружность треугольника BCD касается прямой AB.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Прямая A_1B_1 пересекает описанную окружность Ω треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что $CP = CQ$.

5. Высоты AA_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. H_A — точка симметричная H относительно A. H_AC_1 пересекает прямую BC в точке C_2; аналогично определяется точка A_2. Докажите, что $A_2C_2 \parallel AC$.

Не забудьте перевернуть листочек!

6. Из основания каждой высоты треугольника опущены перпендикуляры на две его другие стороны. Докажите, что основания всех шести перпендикуляров лежат на одной окружности.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, лучи AD и BC пересекаются в точке K, лучи BA и CD — в точке L. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда биссектрисы углов ALD и AKB перпендикулярны.

8. Пусть BH_b, CH_c — высоты треугольника ABC. Прямая H_bH_c пересекает описанную окружность Ω треугольника ABC в точках X и Y. Точки P и Q симметричны X и Y относительно AB и AC соответственно. Докажите, что $PQ \parallel BC$.

9. Дана трапеция $ABCD$. Окружность ω_1 проходит через вершины C и D, а её центр лежит на боковой стороне AB. Аналогично, окружность ω_2 проходит через A и B, а её центр лежит на стороне CD. Пусть K и L — точки пересечения этих окружностей, а T — точка пересечения диагоналей трапеции. Докажите, что точки K, L и T лежат на одной прямой.

10. Пусть Ω — окружность, описанная около треугольника ABC, а точка O — её центр. Окружность Γ с центром A пересекает отрезок BC в точках D и E так, что точки B, D, E и C все различны и лежат на прямой BC в указанном порядке. Пусть F и G — точки пересечения окружностей Γ и Ω, при этом точки A, F, B, C и G лежат на Ω в указанном порядке. Пусть K — вторая точка пересечения окружности, описанной около треугольника BDF, и отрезка AB. Пусть L — вторая точка пересечения окружности, описанной около треугольника CGE, и отрезка CA. Пусть прямые FK и GL различны и пересекаются в точке X. Докажите, что точка X лежит на прямой AO.

6. Из основания каждой высоты треугольника опущены перпендикуляры на две его другие стороны. Докажите, что основания всех шести перпендикуляров лежат на одной окружности.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, лучи AD и BC пересекаются в точке K, лучи BA и CD — в точке L. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда биссектрисы углов ALD и AKB перпендикулярны.

8. Пусть BH_b, CH_c — высоты треугольника ABC. Прямая H_bH_c пересекает описанную окружность Ω треугольника ABC в точках X и Y. Точки P и Q симметричны X и Y относительно AB и AC соответственно. Докажите, что $PQ \parallel BC$.

9. Дана трапеция $ABCD$. Окружность ω_1 проходит через вершины C и D, а её центр лежит на боковой стороне AB. Аналогично, окружность ω_2 проходит через A и B, а её центр лежит на стороне CD. Пусть K и L — точки пересечения этих окружностей, а T — точка пересечения диагоналей трапеции. Докажите, что точки K, L и T лежат на одной прямой.

10. Пусть Ω — окружность, описанная около треугольника ABC, а точка O — её центр. Окружность Γ с центром A пересекает отрезок BC в точках D и E так, что точки B, D, E и C все различны и лежат на прямой BC в указанном порядке. Пусть F и G — точки пересечения окружностей Γ и Ω, при этом точки A, F, B, C и G лежат на Ω в указанном порядке. Пусть K — вторая точка пересечения окружности, описанной около треугольника BDF, и отрезка AB. Пусть L — вторая точка пересечения окружности, описанной около треугольника CGE, и отрезка CA. Пусть прямые FK и GL различны и пересекаются в точке X. Докажите, что точка X лежит на прямой AO.