15. Комбинаторные мотивы в теории чисел. 13 июня

Разложение на простые множители

1. Натуральные числа 1, 2, …, 121 расставлены в клетках таблицы 11×11. Алина посчитала произведения чисел в каждом столбце, а Саша — в каждой строке. Могли ли наборы чисел у Саши и Алины совпасть?

2. Имеется бесконечная арифметическая прогрессия, члены которой — натуральные числа. Докажите, что в ней можно выбрать бесконечно много членов, любые два из которых имеют один и тот же набор простых делителей.

3. Докажите, что каждое натуральное число можно представить как разность двух натуральных чисел, в разложении которых на простые множители одинаковое количество простых чисел (без учёта кратностей).

4. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ существуют n последовательных натуральных чисел, произведение которых делится на каждое из простых чисел, не превосходящих $2n+1$, но не делится ни на какое другое простое число.

5. Докажите, что существует натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы двух натуральных чисел, в разложении каждого из которых встречаются только простые числа, меньшие 2021.

6. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Докажите, что найдётся множество из n натуральных чисел, что для любых двух его подмножеств, суммы чисел в этих подмножествах имеют один и тот же набор простых делителей.

7. Рассмотрим последовательность, первые два члена которой равны 1 и 2 соответственно, а каждый следующий член — наименьшее натуральное число, которое ещё не встретилось в последовательности и которое не взаимно просто с предыдущим членом последовательности. Докажите, что каждое натуральное число входит в эту последовательность.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2

15. Комбинаторные мотивы в теории чисел. 13 июня

Разложение на простые множители

1. Натуральные числа 1, 2, …, 121 расставлены в клетках таблицы 11×11. Алина посчитала произведения чисел в каждом столбце, а Саша — в каждой строке. Могли ли наборы чисел у Саши и Алины совпасть?

2. Имеется бесконечная арифметическая прогрессия, члены которой — натуральные числа. Докажите, что в ней можно выбрать бесконечно много членов, любые два из которых имеют один и тот же набор простых делителей.

3. Докажите, что каждое натуральное число можно представить как разность двух натуральных чисел, в разложении которых на простые множители одинаковое количество простых чисел (без учёта кратностей).

4. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ существуют n последовательных натуральных чисел, произведение которых делится на каждое из простых чисел, не превосходящих $2n+1$, но не делится ни на какое другое простое число.

5. Докажите, что существует натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы двух натуральных чисел, в разложении каждого из которых встречаются только простые числа, меньшие 2021.

6. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Докажите, что найдётся множество из n натуральных чисел, что для любых двух его подмножеств, суммы чисел в этих подмножествах имеют один и тот же набор простых делителей.

7. Рассмотрим последовательность, первые два члена которой равны 1 и 2 соответственно, а каждый следующий член — наименьшее натуральное число, которое ещё не встретилось в последовательности и которое не взаимно просто с предыдущим членом последовательности. Докажите, что каждое натуральное число входит в эту последовательность.