## 20. Устойчивые паросочетания. 17 июня

**Определение.** Пусть в классе есть $n$ мальчиков и $n$ девочек. Каждый из них имеет список предпочтений среди людей противоположного пола. Разбиение $P$ всех людей на пары назовём *стабильным* (или *устойчивым*), если не существует пары $(x, y)$ из мальчика и девочки, в который каждый предпочитает второго относительно своей пары в $P$.

**Алгоритм Гейла–Шепли (1962).**
1. Каждый мальчик делает предложение той девочке, которая ему больше всего нравится.
2. Если девочка получила несколько предложений, то она оставляет на рассмотрение самое лучшее, а остальные отвергает.
3. Каждый отвергнутый мальчик делает предложение следующей по списку предпочтений девочке.
4. Если у каждой девочки ровно одно предложение, то они все соглашаются на текущее предложение, иначе — повторяются пункты 2 и 3.

**1.** Докажите, что алгоритм Гейла–Шепли
a) заканчивается за не более чем $n^2$ шагов.
b) строит устойчивое паросочетание.

**2.** Даны предпочтения мальчиков и девочек:

| Амир | Боря | Витя | Гера |
|---|---|---|---|
| В | Б | Б | В |
| Б | А | Г | А |
| Г | В | А | Г |
| А | Г | В | Б |

| Анна | Бела | Вика | Галя |
|---|---|---|---|
| А | В | В | Б |
| Б | А | Б | А |
| В | Г | Г | В |
| Г | Б | А | Г |

a) Выполните алгоритм Гейла–Шепли для мальчиков.
b) Выполните аналог алгоритма Гейла–Шепли в котором роли мальчиков и девочек поменяны местами.

**3.** a) Докажите, что алгоритм Гейла–Шепли сопоставляет каждому мальчику лучшую из возможных для него в стабильном паросочетании девочку.
b) А каждой девочке — худшего из возможных для неё мальчика.
c) Докажите, что если два алгоритма Гейла–Шепли (для мальчиков и для девочек) дают один результат, то это единственное возможное стабильное паросочетание.

*Не забудьте перевернуть листочек!*

*«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2*

## 20. Устойчивые паросочетания. 17 июня

**Определение.** Пусть в классе есть $n$ мальчиков и $n$ девочек. Каждый из них имеет список предпочтений среди людей противоположного пола. Разбиение $P$ всех людей на пары назовём *стабильным* (или *устойчивым*), если не существует пары $(x, y)$ из мальчика и девочки, в который каждый предпочитает второго относительно своей пары в $P$.

**Алгоритм Гейла–Шепли (1962).**
1. Каждый мальчик делает предложение той девочке, которая ему больше всего нравится.
2. Если девочка получила несколько предложений, то она оставляет на рассмотрение самое лучшее, а остальные отвергает.
3. Каждый отвергнутый мальчик делает предложение следующей по списку предпочтений девочке.
4. Если у каждой девочки ровно одно предложение, то они все соглашаются на текущее предложение, иначе — повторяются пункты 2 и 3.

**1.** Докажите, что алгоритм Гейла–Шепли
a) заканчивается за не более чем $n^2$ шагов.
b) строит устойчивое паросочетание.

**2.** Даны предпочтения мальчиков и девочек:

| Амир | Боря | Витя | Гера |
|---|---|---|---|
| В | Б | Б | В |
| Б | А | Г | А |
| Г | В | А | Г |
| А | Г | В | Б |

| Анна | Бела | Вика | Галя |
|---|---|---|---|
| А | В | В | Б |
| Б | А | Б | А |
| В | Г | Г | В |
| Г | Б | А | Г |

a) Выполните алгоритм Гейла–Шепли для мальчиков.
b) Выполните аналог алгоритма Гейла–Шепли в котором роли мальчиков и девочек поменяны местами.

**3.** a) Докажите, что алгоритм Гейла–Шепли сопоставляет каждому мальчику лучшую из возможных для него в стабильном паросочетании девочку.
b) А каждой девочке — худшего из возможных для неё мальчика.
c) Докажите, что если два алгоритма Гейла–Шепли (для мальчиков и для девочек) дают один результат, то это единственное возможное стабильное паросочетание.

*Не забудьте перевернуть листочек!*

**4.** Пусть у каждой из возможных $n^2$ пар имеется *коэффициент прекрасности* $a_{i,j}$, для всех разных. Каждый мальчик и каждая девочка хотят быть в паре с самым высоким коэффициентом прекрасности. Докажите, что в таком случае стабильное паросочетание только одно.

**5.** a) Предположим, что один из мальчиков узнал предпочтения всех остальных. Может ли ему быть выгодно сделать вид, что у него другие предпочтения, если для получения стабильного паросочетания применяется алгоритм Гейла–Шепли?
b) А может ли быть выгодно девочке сымитировать ненастоящие предпочтения, если она узнала о предпочтениях всех остальных?

**6.** Есть $n$ гномов и $n$ кроватей, у каждого гнома своё предпочтение относительного того, на какой кровати спать. Сопоставление кроватей гномам назовём *устойчивым*, если не существует подмножества гномов и перераспределения их кроватей при котором каждому гному становится строго лучше. Докажите, что следующий *алгоритм главных циклов* корректен и строит стабильное сопоставление:
1. Пронумеруем всех гномов числами от 1 до $n$ и все кровати тоже числами от 1 до $n$.
2. Каждый гном выбирает самую предпочтительную кровать из оставшихся. Если существует цикл из индексов $i_1, \ldots, i_k$ для которого гном номер $i_s$ выбрал кровать с номером $i_{s+1}$ для каждого $s = 1, 2, \ldots, k$ (мы считаем $i_{k+1} := i_1$) то каждый из этих гномов занимает соответствующую кровать.
3. Второй пункт повторяется до тех пор пока остаются кровати.

**4.** Пусть у каждой из возможных $n^2$ пар имеется *коэффициент прекрасности* $a_{i,j}$, для всех разных. Каждый мальчик и каждая девочка хотят быть в паре с самым высоким коэффициентом прекрасности. Докажите, что в таком случае стабильное паросочетание только одно.

**5.** a) Предположим, что один из мальчиков узнал предпочтения всех остальных. Может ли ему быть выгодно сделать вид, что у него другие предпочтения, если для получения стабильного паросочетания применяется алгоритм Гейла–Шепли?
b) А может ли быть выгодно девочке сымитировать ненастоящие предпочтения, если она узнала о предпочтениях всех остальных?

**6.** Есть $n$ гномов и $n$ кроватей, у каждого гнома своё предпочтение относительного того, на какой кровати спать. Сопоставление кроватей гномам назовём *устойчивым*, если не существует подмножества гномов и перераспределения их кроватей при котором каждому гному становится строго лучше. Докажите, что следующий *алгоритм главных циклов* корректен и строит стабильное сопоставление:
1. Пронумеруем всех гномов числами от 1 до $n$ и все кровати тоже числами от 1 до $n$.
2. Каждый гном выбирает самую предпочтительную кровать из оставшихся. Если существует цикл из индексов $i_1, \ldots, i_k$ для которого гном номер $i_s$ выбрал кровать с номером $i_{s+1}$ для каждого $s = 1, 2, \ldots, k$ (мы считаем $i_{k+1} := i_1$) то каждый из этих гномов занимает соответствующую кровать.
3. Второй пункт повторяется до тех пор пока остаются кровати.