

21. Инвариантность финальной ситуации. 18 июня

1. На острове расположены 10 стран, некоторые из которых граничат друг с другом. Каждая страна использует свою валюту и располагает единственным обменным пунктом, в котором взамен 10 денежных единиц этой страны посетителю выдают по одной денежной единице всех сопредельных стран. Максим и Фёдор прилетели на остров, имея по 100 денежных единиц каждой из 10 стран (в том числе по 100 малороссийских рублей). Затем их пути разошлись, и каждый из них ударился в загул по обменным пунктам, кутив пока могут. Докажите, что у Максима и Фёдора осталось поровну малороссийских рублей.

Указание: рассмотрим первое место, где различаются пути Фёдора и Максима; докажите, что можно поменять порядок действий у Максима, чтобы передвинуть это расхождение дальше.

2. Имеются ячейки, занумерованные целыми числами, в которых как-то разложены элеша. За один ход, если какие-то два элеша находятся в ячейке n , то можно один из них переложить в ячейку с номером $n - 1$, а другой — в ячейку с номером $n + 1$.

а) Докажите, что процесс перекалывания рано или поздно закончится.
б) Докажите, что количество действий в каждой ячейке не зависит от последовательности действий.

3. Имеются ячейки, занумерованные целыми числами, в которых как-то разложены элеша. За один ход можно

- или взять по элешу из ячеек с номерами $n - 1$ и n , один из них съесть, а другой положить в ячейку с номером $n + 1$;
- или взять два элеша из ячейки с номером n , один положить в ячейку с номером $n + 1$, а другой — в ячейку с номером $n - 2$.

Докажите, что в какой-то момент нельзя будет сделать действие и, более того, финальная конфигурация не зависит от последовательности ходов.

4. В ячейке с номером 1 лежат n элешей. За один ход можно переместить элеш из ячейки с номером k в ячейку с номером $k + 1$, если в ячейке с номером k элешей хотя бы на 2 больше, чем в ячейке с номером $k + 1$. Докажите, что финальная конфигурация элешей не зависит от порядка действий.

5. Имеется несколько кучек, в которых суммарно лежат $\frac{n(n+1)}{2}$ элешей. За ход из каждой существующей кучки берётся по одному элешу, и из них формируется новая кучка. Докажите, что через некоторое время будет ровно n кучек с 1, 2, ..., n элешами.

21. Инвариантность финальной ситуации. 18 июня

1. На острове расположены 10 стран, некоторые из которых граничат друг с другом. Каждая страна использует свою валюту и располагает единственным обменным пунктом, в котором взамен 10 денежных единиц этой страны посетителю выдают по одной денежной единице всех сопредельных стран. Максим и Фёдор прилетели на остров, имея по 100 денежных единиц каждой из 10 стран (в том числе по 100 малороссийских рублей). Затем их пути разошлись, и каждый из них ударился в загул по обменным пунктам, кутив пока могут. Докажите, что у Максима и Фёдора осталось поровну малороссийских рублей.

Указание: рассмотрим первое место, где различаются пути Фёдора и Максима; докажите, что можно поменять порядок действий у Максима, чтобы передвинуть это расхождение дальше.

2. Имеются ячейки, занумерованные целыми числами, в которых как-то разложены элеша. За один ход, если какие-то два элеша находятся в ячейке n , то можно один из них переложить в ячейку с номером $n - 1$, а другой — в ячейку с номером $n + 1$.

а) Докажите, что процесс перекалывания рано или поздно закончится.
б) Докажите, что количество действий в каждой ячейке не зависит от последовательности действий.

3. Имеются ячейки, занумерованные целыми числами, в которых как-то разложены элеша. За один ход можно

- или взять по элешу из ячеек с номерами $n - 1$ и n , один из них съесть, а другой положить в ячейку с номером $n + 1$;
- или взять два элеша из ячейки с номером n , один положить в ячейку с номером $n + 1$, а другой — в ячейку с номером $n - 2$.

Докажите, что в какой-то момент нельзя будет сделать действие и, более того, финальная конфигурация не зависит от последовательности ходов.

4. В ячейке с номером 1 лежат n элешей. За один ход можно переместить элеш из ячейки с номером k в ячейку с номером $k + 1$, если в ячейке с номером k элешей хотя бы на 2 больше, чем в ячейке с номером $k + 1$. Докажите, что финальная конфигурация элешей не зависит от порядка действий.

5. Имеется несколько кучек, в которых суммарно лежат $\frac{n(n+1)}{2}$ элешей. За ход из каждой существующей кучки берётся по одному элешу, и из них формируется новая кучка. Докажите, что через некоторое время будет ровно n кучек с 1, 2, ..., n элешами.