22. Числовой разнобой. 18 июня

1. Докажите, что для взаимно простых натуральных чисел a и b существуют такие натуральные числа m и n, что число $a^m + b^n - 1$ делится на ab.

2. Найдите все натуральные числа, взаимно простые с каждым членом последовательности $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, при $n \geqslant 1$.

3. Докажите, что $\varphi(a^n - 1)$ делится на n для натуральных a и n.

4. Докажите, что у числа $a^{2^n} + 1$ нет делителей от 3 до 2^{n+1}.

5. Пусть p и q — простые, $q > 5$. Известно, что $2^p + 3^p$ делится на q. Докажите, что $q > 2p$.

6. Пусть $a > 1$, $p > 2$ и p – простое. Докажите, что простые нечетные делители $a^p - 1$ или делят $a - 1$ или сравнимы с 1 по модулю $2p$.

7. Докажите, что для каждого нечётного простого p существует
a) хотя бы одно простое число вида $2pk + 1$;
b) бесконечно много простых такого вида.

8. Для натурального числа n известно, что $2^n + 1$ делится на n^2.
a) Докажите, что n делится на 3.
b) Докажите, что n не делится на 9.
c) Найдите все такие n.

9. Решите в целых числах уравнение $\dfrac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$.

10. Пусть $p > 5$ — простое число. Известно, что длина наименьшего периода десятичной записи дроби $1/p$ равна $2n$. Докажите, что если этот период разбить на два n-значных куска, то сумма чисел в этих кусках равна $99\ldots9$ (n девяток). Например, $1/7 = 0.(142857)$, $142 + 857 = 999$.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2

22. Числовой разнобой. 18 июня

1. Докажите, что для взаимно простых натуральных чисел a и b существуют такие натуральные числа m и n, что число $a^m + b^n - 1$ делится на ab.

2. Найдите все натуральные числа, взаимно простые с каждым членом последовательности $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, при $n \geqslant 1$.

3. Докажите, что $\varphi(a^n - 1)$ делится на n для натуральных a и n.

4. Докажите, что у числа $a^{2^n} + 1$ нет делителей от 3 до 2^{n+1}.

5. Пусть p и q — простые, $q > 5$. Известно, что $2^p + 3^p$ делится на q. Докажите, что $q > 2p$.

6. Пусть $a > 1$, $p > 2$ и p – простое. Докажите, что простые нечетные делители $a^p - 1$ или делят $a - 1$ или сравнимы с 1 по модулю $2p$.

7. Докажите, что для каждого нечётного простого p существует
a) хотя бы одно простое число вида $2pk + 1$;
b) бесконечно много простых такого вида.

8. Для натурального числа n известно, что $2^n + 1$ делится на n^2.
a) Докажите, что n делится на 3.
b) Докажите, что n не делится на 9.
c) Найдите все такие n.

9. Решите в целых числах уравнение $\dfrac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$.

10. Пусть $p > 5$ — простое число. Известно, что длина наименьшего периода десятичной записи дроби $1/p$ равна $2n$. Докажите, что если этот период разбить на два n-значных куска, то сумма чисел в этих кусках равна $99\ldots9$ (n девяток). Например, $1/7 = 0.(142857)$, $142 + 857 = 999$.