23. Направления на H и на O. 19 июня

1. Пусть H — ортоцентр, O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые BH и BO симметричны относительно биссектрисы угла B; разберите два случая: когда угол B острый и когда тупой.

2. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, O — центр описанной около этого треугольника окружности, D — такая точка на стороне AC, что $AD = AB$. Докажите, что прямые AO и LD перпендикулярны.

3. Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC пересекает его стороны AB и BC в точках X и Y. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BXY лежит на высоте треугольника ABC. *Кто считает углы может даже не приходить.*

4. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а I_a и I_c — центры вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон BC и AB соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника II_aI_c. Докажите, что $OI \perp AC$.

5. Пусть ABC — остроугольный треугольник. AH_A, BH_B, CH_C — высоты треугольника; M_A, M_B, M_C — середины сторон BC, CA, AB; X_A — основание высоты из A на H_BH_C; X_B, X_C определим аналогично. Докажите, что описанные окружности треугольников $M_AX_BX_C$, $M_BX_AX_C$, $M_CX_AX_B$ пересекаются в одной точке.

6. В треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H, O — центр описанной окружности. Точка P симметрична A относительно B_1C_1. Докажите, что A_1, H, O, P лежат на одной окружности.

7. Даны две окружности с центрами O_1 и O_2, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной точки X первой окружности (отличной от точек A и B) обозначим через Y и Z точки пересечения прямых XA и XB соответственно со второй окружностью. Пусть окружность, описанная около треугольника XYZ, вторично пересекает первую окружность в точке P. Докажите, что угол XPO_2 прямой.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2

23. Направления на H и на O. 19 июня

1. Пусть H — ортоцентр, O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые BH и BO симметричны относительно биссектрисы угла B; разберите два случая: когда угол B острый и когда тупой.

2. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, O — центр описанной около этого треугольника окружности, D — такая точка на стороне AC, что $AD = AB$. Докажите, что прямые AO и LD перпендикулярны.

3. Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC пересекает его стороны AB и BC в точках X и Y. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BXY лежит на высоте треугольника ABC. *Кто считает углы может даже не приходить.*

4. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а I_a и I_c — центры вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон BC и AB соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника II_aI_c. Докажите, что $OI \perp AC$.

5. Пусть ABC — остроугольный треугольник. AH_A, BH_B, CH_C — высоты треугольника; M_A, M_B, M_C — середины сторон BC, CA, AB; X_A — основание высоты из A на H_BH_C; X_B, X_C определим аналогично. Докажите, что описанные окружности треугольников $M_AX_BX_C$, $M_BX_AX_C$, $M_CX_AX_B$ пересекаются в одной точке.

6. В треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H, O — центр описанной окружности. Точка P симметрична A относительно B_1C_1. Докажите, что A_1, H, O, P лежат на одной окружности.

7. Даны две окружности с центрами O_1 и O_2, пересекающиеся в точках A и B. Для произвольной точки X первой окружности (отличной от точек A и B) обозначим через Y и Z точки пересечения прямых XA и XB соответственно со второй окружностью. Пусть окружность, описанная около треугольника XYZ, вторично пересекает первую окружность в точке P. Докажите, что угол XPO_2 прямой.