24. Разнобой–3. 19 июня

1. Докажите, что у уравнения $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$ нет решений помимо тех, что были построены во время решения задачи **19.4**.

2. Докажите, что уравнение

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + abd + acd + bcd$$

имеет решение в целых числах, больших 10^{10}.

3. Целые числа a и b таковы, что $n^2 + an + b$ — точный квадрат при всех $n > 1000$. Докажите, что если а) a — чётное; b) a — произвольное, то найдётся целое число s такое, что $a = 2s$, $b = s^2$.

4. Последовательность целых чисел назовём *любопытной*, если первые два ее элемента равны 1, а каждое следующее число равно либо сумме двух предыдущих, либо модулю их разности. Докажите, что для любых взаимно простых натуральных чисел a и b существует любопытная последовательность $x_1, x_2, \ldots,$ и такое натуральное n, что $x_n = a$ и $x_{n+2021} = b$.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2

24. Разнобой–3. 19 июня

1. Докажите, что у уравнения $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$ нет решений помимо тех, что были построены во время решения задачи **19.4**.

2. Докажите, что уравнение

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + abd + acd + bcd$$

имеет решение в целых числах, больших 10^{10}.

3. Целые числа a и b таковы, что $n^2 + an + b$ — точный квадрат при всех $n > 1000$. Докажите, что если а) a — чётное; b) a — произвольное, то найдётся целое число s такое, что $a = 2s$, $b = s^2$.

4. Последовательность целых чисел назовём *любопытной*, если первые два ее элемента равны 1, а каждое следующее число равно либо сумме двух предыдущих, либо модулю их разности. Докажите, что для любых взаимно простых натуральных чисел a и b существует любопытная последовательность $x_1, x_2, \ldots,$ и такое натуральное n, что $x_n = a$ и $x_{n+2021} = b$.