25. Приближение чисел рациональными. 21 июня

Определение. Для вещественного числа x мы обозначаем за $\|x\|$ расстояние от x до ближайшего целого числа.

1. На окружности длины 1 есть ямка радиуса 1/1000. А еще по окружности из некоторой начальной точки прыгает против часовой стрелки кузнечик с *иррациональным* шагом $\alpha > 0$. Докажите, что рано или поздно кузнечик попадёт в эту ямку.

2. Теперь кузнечик прыгает по прямой вправо с иррациональным шагом $\alpha > 0$. Во всех целочисленных точках этой прямой выкопаны ямки радиуса 1/1000. Докажите, что кузнечик попадёт в какую-то ямку.

3. Пусть n натуральное число. Докажите, что для любого вещественного α существует натуральное $x \leqslant n$ такое, что $\|x\alpha\| \leqslant 1/n$.

4. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — набор вещественных чисел. Докажите, что для любого натурального n существует натуральное $x \leqslant n^k$ для которого $\|x\alpha_1\|, \ldots, \|x\alpha_k\| \leqslant 1/n$.

5. Докажите, что для любого иррационального α существует бесконечно много неприводимых дробей $\dfrac{p}{q}$ таких, что $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$.

6. Существует ли вещественное число α такое, что $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{3q^2}$ для любой неприводимой дроби $\dfrac{p}{q}$?

7. Докажите, что для любой неприводимой дроби $\dfrac{p}{q}$ выполнено $\left|\sqrt[3]{2} - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{7q^3}$.

8. Найдите все четвёрки вещественных чисел a, b, c, d такие, что для любого целого числа n выполнено равенство $[an+b] = [cn+d]$.

9. Докажите, что среди последовательности из n чисел можно выбрать несколько с суммой S для которой выполнено $\|S\| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2

25. Приближение чисел рациональными. 21 июня

Определение. Для вещественного числа x мы обозначаем за $\|x\|$ расстояние от x до ближайшего целого числа.

1. На окружности длины 1 есть ямка радиуса 1/1000. А еще по окружности из некоторой начальной точки прыгает против часовой стрелки кузнечик с *иррациональным* шагом $\alpha > 0$. Докажите, что рано или поздно кузнечик попадёт в эту ямку.

2. Теперь кузнечик прыгает по прямой вправо с иррациональным шагом $\alpha > 0$. Во всех целочисленных точках этой прямой выкопаны ямки радиуса 1/1000. Докажите, что кузнечик попадёт в какую-то ямку.

3. Пусть n натуральное число. Докажите, что для любого вещественного α существует натуральное $x \leqslant n$ такое, что $\|x\alpha\| \leqslant 1/n$.

4. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — набор вещественных чисел. Докажите, что для любого натурального n существует натуральное $x \leqslant n^k$ для которого $\|x\alpha_1\|, \ldots, \|x\alpha_k\| \leqslant 1/n$.

5. Докажите, что для любого иррационального α существует бесконечно много неприводимых дробей $\dfrac{p}{q}$ таких, что $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$.

6. Существует ли вещественное число α такое, что $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{3q^2}$ для любой неприводимой дроби $\dfrac{p}{q}$?

7. Докажите, что для любой неприводимой дроби $\dfrac{p}{q}$ выполнено $\left|\sqrt[3]{2} - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{7q^3}$.

8. Найдите все четвёрки вещественных чисел a, b, c, d такие, что для любого целого числа n выполнено равенство $[an+b] = [cn+d]$.

9. Докажите, что среди последовательности из n чисел можно выбрать несколько с суммой S для которой выполнено $\|S\| \leqslant \frac{1}{n+1}$.