## 26. Разнобой–4. 21 июня

**1.** Натуральное число $k$ и целые числа $x$ и $y$ таковы, что

$$x^2 + y^2 + 1 = kxy.$$

Докажите, что $k = 3$.

**2.** В графе рёбер хотя бы в 100 раз больше, чем вершин. Докажите, что в нём можно выделить подграф, в котором степень каждой вершины хотя бы 101.

**3.** На доске написаны числа 3, 4, 5 и 6. Каждым ходом разрешается выбрать на доске два числа $a$ и $b$ и заменить их числами $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ и $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. Можно ли такими операциями получить на доске хотя бы одно число, меньшее 1?

**4.** Пусть $d > 1$. Несколько детей образовали $2^{d-1} - 1$ различных сообществ, в каждое из которых вошли ровно $d$ детей. Докажите, что можно часть детей покрасить в красный цвет, а часть — в синий так, что в каждом сообществе будет и красный, и синий ребёнок.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2

26. Разнобой–4. 21 июня

1. Натуральное число $k$ и целые числа $x$ и $y$ таковы, что

$$x^2 + y^2 + 1 = kxy.$$

Докажите, что $k = 3$.

2. В графе рёбер хотя бы в 100 раз больше, чем вершин. Докажите, что в нём можно выделить подграф, в котором степень каждой вершины хотя бы 101.

3. На доске написаны числа 3, 4, 5 и 6. Каждым ходом разрешается выбрать на доске два числа $a$ и $b$ и заменить их числами $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ и $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. Можно ли такими операциями получить на доске хотя бы одно число, меньшее 1?

4. Пусть $d > 1$. Несколько детей образовали $2^{d-1} - 1$ различных сообществ, в каждое из которых вошли ровно $d$ детей. Докажите, что можно часть детей покрасить в красный цвет, а часть — в синий так, что в каждом сообществе будет и красный, и синий ребёнок.