

30. Усреднение. 23 июня

Мысль. Если некоторая величина в среднем равняется k , то найдётся ситуация, в которой она хотя бы k , а также ситуация, в которой она не превосходит k .

Комментарий. Цель этого занятия — научиться применять усреднение. Поэтому решения, его не использующие, не принимаются.

1. Каждая из двух окружностей радиуса 1 поделена на 100 равных дуг. На каждой окружности 50 дуг покрашены в синий цвет, 50 — в красный. Докажите, что можно так совместить эти окружности, что хотя бы в 50 местах цвета дуг совпадут.

2. У инженера Саши есть несколько лампочек и несколько переключателей. Каждый из переключателей подсоединён к некоторому набору лампочек. При нажатии на переключатель все лампочки, к которым он присоединён, меняют своё состояние: выключенные — включаются, включенные — выключаются. Каждая лампочка присоединена хотя бы к одному переключателю. Докажите, что последовательно нажимая некоторые их переключателей, можно добиться того, чтобы включенными оказались хотя бы половина лампочек. Начальное состояние лампочек произвольное.

3. Теперь лампочек всего 99, каждая присоединена ровно к 25 переключателям, а переключателей ровно 50. Докажите, что Саша может нажать на такие 17 переключателей, что хотя бы 50 лампочек окажутся включенными.

4. В стаде 2019 волчар, некоторые друг друга уважают, а некоторые друг друга — нет. Докажите, что можно так выбрать пару волчар, что среди оставшихся найдётся хотя бы 1009 волчар, каждый из которых или уважает обоих из выбранных волчар, или обоих не уважает.

5. В стаде фермера несколько овечек и несколько баранов. Каждой овечке нравится один или два барана. Чтобы избежать споров между овечками, фермер решил выгнать несколько овечек и несколько баранов так, чтобы каждой из оставшихся овечек нравился ровно один из оставшихся баранов. Докажите, что он может сделать это так, чтобы у него осталась хотя бы половина стада.

30. Усреднение. 23 июня

Мысль. Если некоторая величина в среднем равняется k , то найдётся ситуация, в которой она хотя бы k , а также ситуация, в которой она не превосходит k .

Комментарий. Цель этого занятия — научиться применять усреднение. Поэтому решения, его не использующие, не принимаются.

1. Каждая из двух окружностей радиуса 1 поделена на 100 равных дуг. На каждой окружности 50 дуг покрашены в синий цвет, 50 — в красный. Докажите, что можно так совместить эти окружности, что хотя бы в 50 местах цвета дуг совпадут.

2. У инженера Саши есть несколько лампочек и несколько переключателей. Каждый из переключателей подсоединён к некоторому набору лампочек. При нажатии на переключатель все лампочки, к которым он присоединён, меняют своё состояние: выключенные — включаются, включенные — выключаются. Каждая лампочка присоединена хотя бы к одному переключателю. Докажите, что последовательно нажимая некоторые их переключателей, можно добиться того, чтобы включенными оказались хотя бы половина лампочек. Начальное состояние лампочек произвольное.

3. Теперь лампочек всего 99, каждая присоединена ровно к 25 переключателям, а переключателей ровно 50. Докажите, что Саша может нажать на такие 17 переключателей, что хотя бы 50 лампочек окажутся включенными.

4. В стаде 2019 волчар, некоторые друг друга уважают, а некоторые друг друга — нет. Докажите, что можно так выбрать пару волчар, что среди оставшихся найдётся хотя бы 1009 волчар, каждый из которых или уважает обоих из выбранных волчар, или обоих не уважает.

5. В стаде фермера несколько овечек и несколько баранов. Каждой овечке нравится один или два барана. Чтобы избежать споров между овечками, фермер решил выгнать несколько овечек и несколько баранов так, чтобы каждой из оставшихся овечек нравился ровно один из оставшихся баранов. Докажите, что он может сделать это так, чтобы у него осталась хотя бы половина стада.