32. МеждусоБой. 24 июня

1. Дан конечный ориентированный граф без циклов. Известно, что для любой вершины A, если из неё выйти по рёбрам AB и AC, то можно найти вершину D, что до D можно дойти как из B, так и из C. Докажите, что для любой вершины любые два непродолжающихся пути из этой вершины заканчиваются в одной и той же вершине.

2. Точку X на описанной окружности треугольника ABC отразили относительно середин сторон BC, CA и AB и получили точки P, Q и R соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PQR проходит через ортоцентр треугольника ABC.

3. В каждой клетке таблицы $m \times n$ написано по целому неотрицательному числу. Назовём расстановку чисел *хорошей*, если она удовлетворяет двум условиям: *1.* числа в соседних клетках отличаются не более чем на 1; *2.* если число меньше или равно всех чисел в соседних с ним клетках, то оно равно 0. Найдите количество хороших расстановок.

4. Докажите, что из равенств $ax - by - cz - dt = 0$, $bx + ay - dz + ct = 0$, $cx + dy + az - bt = 0$, $dx - cy + bz + at = 0$ следует либо $a = b = c = d = 0$, либо $x = y = z = t = 0$.

5. На плоскости стоят 10 баранов и один волчара. За один ход волчара передвигается не более чем на один метр, а также один из баранов передвигается не более чем на один метр. Всегда ли волчара сможет оказаться с каким-то из баранов в одной точке?

6. В остроугольном треугольнике ABC сторона AC больше стороны BC, а CD, AP и BQ — высоты. Пусть R — точка пересечения прямых PQ и AB. Докажите, что описанные окружности треугольников CPQ и RDQ касаются.

7. На плоскости расположены два непересекающихся круга. Всегда ли на плоскости существует такая точка A вне кругов, что любая прямая проходящая через неё, пересекает (не касается) хотя бы один из кругов?

8. Натуральные числа a, b и k таковы, что $a^2 + b^2 - 1 = kab$. Чему может равняться k?

9. Найдите все натуральные n, для которых числа n и $2^n + 1$ имеют один и тот же набор простых делителей.

10. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n и m, для которых $\frac{n+1}{m} + \frac{m+1}{n}$ — целое.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2

32. МеждусоБой. 24 июня

1. Дан конечный ориентированный граф без циклов. Известно, что для любой вершины A, если из неё выйти по рёбрам AB и AC, то можно найти вершину D, что до D можно дойти как из B, так и из C. Докажите, что для любой вершины любые два непродолжающихся пути из этой вершины заканчиваются в одной и той же вершине.

2. Точку X на описанной окружности треугольника ABC отразили относительно середин сторон BC, CA и AB и получили точки P, Q и R соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PQR проходит через ортоцентр треугольника ABC.

3. В каждой клетке таблицы $m \times n$ написано по целому неотрицательному числу. Назовём расстановку чисел *хорошей*, если она удовлетворяет двум условиям: *1.* числа в соседних клетках отличаются не более чем на 1; *2.* если число меньше или равно всех чисел в соседних с ним клетках, то оно равно 0. Найдите количество хороших расстановок.

4. Докажите, что из равенств $ax - by - cz - dt = 0$, $bx + ay - dz + ct = 0$, $cx + dy + az - bt = 0$, $dx - cy + bz + at = 0$ следует либо $a = b = c = d = 0$, либо $x = y = z = t = 0$.

5. На плоскости стоят 10 баранов и один волчара. За один ход волчара передвигается не более чем на один метр, а также один из баранов передвигается не более чем на один метр. Всегда ли волчара сможет оказаться с каким-то из баранов в одной точке?

6. В остроугольном треугольнике ABC сторона AC больше стороны BC, а CD, AP и BQ — высоты. Пусть R — точка пересечения прямых PQ и AB. Докажите, что описанные окружности треугольников CPQ и RDQ касаются.

7. На плоскости расположены два непересекающихся круга. Всегда ли на плоскости существует такая точка A вне кругов, что любая прямая проходящая через неё, пересекает (не касается) хотя бы один из кругов?

8. Натуральные числа a, b и k таковы, что $a^2 + b^2 - 1 = kab$. Чему может равняться k?

9. Найдите все натуральные n, для которых числа n и $2^n + 1$ имеют один и тот же набор простых делителей.

10. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n и m, для которых $\frac{n+1}{m} + \frac{m+1}{n}$ — целое.