33. Список вопросов и избранных задач к теоретическому зачёту. 24 июня

1. Антипараллельность.

2. Алгоритм Гейла–Шепли: определение устойчивого паросочетание, доказательство его существования.

3. Алгоритм главных циклов.

4. Работа по модулю простого числа: возможность делить, использовать дроби, решать квадратные уравнения.

5. Уравнение $x^2 + y^2 + 1 = kxy$: описание всех решений.

6. Показатель числа по модулю.

Избранные задачи

7.4. Имеется n мешков, пронумерованных числами от 1 до n, в каждом из которых сидит по 200 лягушек. Два игрока играют в следующую игру: каждый игрок своим ходом выбирает один из мешков и вынимает из него несколько лягушек. При этом, если в данном мешке осталось $x \geqslant 0$ лягушек, то из мешков с большими номерами, в которых сидело больше, чем x лягушек, несколько лягушек убегает так, что там остается ровно по x лягушек. Проигрывает игрок, взявший последнюю лягушку из мешка номер 1. Кто выигрывает при правильной игре?

8.7. На высотах AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC взяты точки A_2, B_2, C_2, отличные от точки пересечения высот H, причем сумма площадей треугольников ABC_2, BCA_2, CAB_2 равна площади треугольника ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_2B_2C_2$, проходит через точку H.

9.5. Пусть m – натуральное число. Докажите, что найдётся натуральное число $n > m$ такое, что каждое из чисел $2^n - m$, $2^n - (m-1)$, $\ldots$, $2^n + m$ — составное.

9.7. Пусть $P(x)$ — произвольный квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует натуральное n, для которого $P(n)$ — составное.

10.2. Натуральные числа a, b, c попарно различные. Докажите, что число $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ составное.

10.3. Найдите все натуральные числа n для которых число $n^4 + 4^n$ — простое.

10.6. Пусть a, b, c, d — натуральные числа. Докажите, что если $ab = cd$, то $a + b + c + d$ — составное.

12.7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, лучи AD и BC пересекаются в точке K, лучи BA и CD — в точке L. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда биссектрисы углов ALD и AKB перпендикулярны.

12.8. Пусть BH_b, CH_c — высоты треугольника ABC. Прямая H_bH_c пересекает описанную окружность Ω треугольника ABC в точках X и Y. Точки P и Q симметричны X и Y относительно AB и AC соответственно. Докажите, что $PQ \parallel BC$.

18.5. На сабантуй пришли 20 детей, у каждого с собой было несколько эчпочмаков. Раз в минуту каждый ребёнок, у которого есть хотя бы 19 эчпочмаков, отдает по эчпочмаку каждому из остальных детей (при этом, возможна ситуация, когда ребёнок A одновременно получает и отдаёт эчпочмак ребёнку B). Известно, что этот процесс будет продолжаться бесконечно. Какое наименьшее количество эчпочмаков может быть у детей?

20.3. Докажите, что алгоритм Гейла–Шепли сопоставляет каждому мальчику лучшую из возможных для него в стабильном паросочетании девочку, а каждой девочке — худшего из возможных для неё мальчика.

21.2. Имеются ячейки, занумерованные целыми числами, в которых как-то разложены элеши. За один ход, если какие-то два элеша находятся в ячейке n, то можно один из них переложить в ячейку с номером $n - 1$, а другой — в ячейку с номером $n + 1$. Докажите, что процесс перекладывания рано или поздно закончится, и что количество действий в каждой ячейке не зависит от последовательности действий.

22.7. Докажите, что для каждого нечётного простого p существует бесконечно много простых вида $2pk + 1$.

23.3′. Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках X и Y. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BXY лежит на высоте треугольника ABC.

24.3. Целые числа a и b таковы, что $n^2 + an + b$ — точный квадрат при всех $n > 1000$. Докажите, что найдётся целое число s такое, что $a = 2s$, $b = s^2$.

25.3. Пусть n натуральное число. Докажите, что для любого вещественного α существует натуральное $x \leqslant n$ такое, что $\|x\alpha\| \leqslant 1/n$.

26.4. Пусть $d > 1$. Несколько детей образовали $2^{d-1} - 1$ различных сообществ, в каждое из которых вошли ровно d детей. Докажите, что можно часть детей покрасить в красный цвет, а часть — в синий так, что в каждом сообществе будет и красный, и синий ребёнок.

28.3. В графе рёбер хотя бы в 9 раз больше чем вершин. Докажите, что в нём есть простой путь длины хотя бы 10.

29.6. Прямая, проходящая через точку H перпендикулярно отрезку M_AH, пересекает AB и AC в точках E и F. Докажите, что $HE = HF$.

30.5. В стаде фермера несколько овечек и несколько баранов. Каждой овечке нравится один или два барана. Чтобы избежать споров между овечками, фермер решил выгнать несколько овечек и несколько баранов так, чтобы каждой из оставшихся овечек нравился ровно один из оставшихся баранов. Докажите, что он может сделать это так, чтобы у него осталась хотя бы половина стада.

32.1. Дан конечный ориентированный граф без циклов. Известно, что для любой вершины A, если из неё выйти по рёбрам AB и AC, то можно найти вершину D, что до D можно дойти как из B, так и из C. Докажите, что для любой вершины любые два непродолжающихся пути из этой вершины заканчиваются в одной и той же вершине.