2. Геометрический разнобой. 1 октября

1. Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q.Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина не содержащей C дуги AB описанной окружности. Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. В каком отношении I делит отрезок CW?

3. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются с прямой ℓ. Точки пересечения ℓ с окружностью S_1 — A_1 и A_2, а с окружностью S_2 — B_1 и B_2. Известно, что прямая, касающаяся окружности S_1 в точке A_1, параллельна прямой, касающейся окружности S_2 в точке B_1. Докажите, что тогда прямая, касательная к S_1 в точке A_2, параллельна прямой, касающейся S_2 в точке B_2.

4. В треугольнике ABC ($AB < BC$), M — середина AC, N — середина дуги ABC описанной окружности треугольника. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

5. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

6. Из точки D окружности S опущен перпендикуляр DC на диаметр AB. Другая окружность касается отрезка CA в точке E, а также отрезка CD и окружности S. Докажите, что DE — биссектриса ADC.

7. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω.

8. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I. Точка B_0, симметричная точке B относительно прямой OI, лежит внутри угла ABI. Докажите, что касательные к окружности, описанной около треугольника BB_0I, проведенные в точках B_0 и I, пересекаются на прямой AC.

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2021

2. Геометрический разнобой. 1 октября

1. Отрезок, соединяющий середины «меньших» дуг AB и AC описанной окружности треугольника ABC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q.Докажите, что $APIQ$ — ромб, где I — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина не содержащей C дуги AB описанной окружности. Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. В каком отношении I делит отрезок CW?

3. Две окружности S_1 и S_2 пересекаются с прямой ℓ. Точки пересечения ℓ с окружностью S_1 — A_1 и A_2, а с окружностью S_2 — B_1 и B_2. Известно, что прямая, касающаяся окружности S_1 в точке A_1, параллельна прямой, касающейся окружности S_2 в точке B_1. Докажите, что тогда прямая, касательная к S_1 в точке A_2, параллельна прямой, касающейся S_2 в точке B_2.

4. В треугольнике ABC ($AB < BC$), M — середина AC, N — середина дуги ABC описанной окружности треугольника. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

5. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

6. Из точки D окружности S опущен перпендикуляр DC на диаметр AB. Другая окружность касается отрезка CA в точке E, а также отрезка CD и окружности S. Докажите, что DE — биссектриса ADC.

7. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω.

8. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I. Точка B_0, симметричная точке B относительно прямой OI, лежит внутри угла ABI. Докажите, что касательные к окружности, описанной около треугольника BB_0I, проведенные в точках B_0 и I, пересекаются на прямой AC.