3. Разнобой по теории чисел. 1 октября

1. При каком наибольшем натуральном n среднее геометрическое n различных натуральных чисел, не превосходящих 10, может оказаться натуральным числом?

2. Решите в целых числах уравнение

$$3x^2 - y^2 = 3^{x+y}.$$

3. Даны натуральные числа a, b и k. Известно, что для некоторого натурального n выполнено равенство $a^k n - b^k(n+1) = a - b$. Докажите, что число $a - b$ является k–й степенью некоторого натурального числа.

4. Решите в целых неотрицательных числах уравнение

$$x^5 + 3x + 4 = 2^m.$$

5. Натуральные числа x, y и z взаимно просты в совокупности, причём

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx).$$

Докажите, что x, y и z — квадраты натуральных чисел.

6. Тройка (x, y, z) целых чисел, наибольший общий делитель которых равен единице, является решением уравнения

$$y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2.$$

Докажите, что z является кубом целого числа.

7. Натуральные делители числа n, которые являются точными квадратами, составляют $\frac{3}{70}$ от общего количества натуральных делителей n. Сколько различных простых делителей у числа n?

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2021

3. Разнобой по теории чисел. 1 октября

1. При каком наибольшем натуральном n среднее геометрическое n различных натуральных чисел, не превосходящих 10, может оказаться натуральным числом?

2. Решите в целых числах уравнение

$$3x^2 - y^2 = 3^{x+y}.$$

3. Даны натуральные числа a, b и k. Известно, что для некоторого натурального n выполнено равенство $a^k n - b^k(n+1) = a - b$. Докажите, что число $a - b$ является k–й степенью некоторого натурального числа.

4. Решите в целых неотрицательных числах уравнение

$$x^5 + 3x + 4 = 2^m.$$

5. Натуральные числа x, y и z взаимно просты в совокупности, причём

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx).$$

Докажите, что x, y и z — квадраты натуральных чисел.

6. Тройка (x, y, z) целых чисел, наибольший общий делитель которых равен единице, является решением уравнения

$$y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2.$$

Докажите, что z является кубом целого числа.

7. Натуральные делители числа n, которые являются точными квадратами, составляют $\frac{3}{70}$ от общего количества натуральных делителей n. Сколько различных простых делителей у числа n?