4. Разнобой по многочленам. 2 октября

1. Даны квадратный трехчлен $P(x) = x^2 + ax + b$ и многочлен

$$Q(x) = P(x^5 + 2x - 1) + P(x^5 + 3x + 1).$$

Найдите все возможные пары значений параметров a и b, при которых каждый из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ имеет ровно по одному корню.

2. Существует ли многочлен $P(x)$, такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ и $P(n)$ иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

3. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ делится на k.

4. Даны квадратные трехчлены $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ и $x^2 + ex + f$. Оказалось, что любые два из них имеют общий корень, но все три общего корня не имеют. Докажите, что выполено ровно два из неравенств

$$\frac{a^2 + c^2 - e^2}{4} > b + d - f,$$
$$\frac{c^2 + e^2 - a^2}{4} > d + f - b,$$
$$\frac{e^2 + a^2 - c^2}{4} > f + b - d.$$

5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 1$. На плоскости нарисовали графики $y = P(x)$ и $x = P(y)$, сдвинутые на некоторые векторы. Оказалось, что n из общих точек сдвинутых графиков лежат на прямой $y = x$. Докажите, что сдвинутые графики симметричны относительно этой прямой.

6. Существуют ли такие ненулевые числа a, b, c, что при любом $n > 3$ можно найти многочлен вида $P_n(x) = x^n + \ldots + ax^2 + bx + c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?

7. Пусть n — натуральное число. На $2n + 1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении

$$* \cdot x^{2n} + * \cdot x^{2n-1} + \ldots + * \cdot x + *$$

так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Обязательно ли это можно сделать?

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2021

4. Разнобой по многочленам. 2 октября

1. Даны квадратный трехчлен $P(x) = x^2 + ax + b$ и многочлен

$$Q(x) = P(x^5 + 2x - 1) + P(x^5 + 3x + 1).$$

Найдите все возможные пары значений параметров a и b, при которых каждый из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ имеет ровно по одному корню.

2. Существует ли многочлен $P(x)$, такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ и $P(n)$ иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

3. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$ делится на k.

4. Даны квадратные трехчлены $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ и $x^2 + ex + f$. Оказалось, что любые два из них имеют общий корень, но все три общего корня не имеют. Докажите, что выполено ровно два из неравенств

$$\frac{a^2 + c^2 - e^2}{4} > b + d - f,$$
$$\frac{c^2 + e^2 - a^2}{4} > d + f - b,$$
$$\frac{e^2 + a^2 - c^2}{4} > f + b - d.$$

5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 1$. На плоскости нарисовали графики $y = P(x)$ и $x = P(y)$, сдвинутые на некоторые векторы. Оказалось, что n из общих точек сдвинутых графиков лежат на прямой $y = x$. Докажите, что сдвинутые графики симметричны относительно этой прямой.

6. Существуют ли такие ненулевые числа a, b, c, что при любом $n > 3$ можно найти многочлен вида $P_n(x) = x^n + \ldots + ax^2 + bx + c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?

7. Пусть n — натуральное число. На $2n + 1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении

$$* \cdot x^{2n} + * \cdot x^{2n-1} + \ldots + * \cdot x + *$$

так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Обязательно ли это можно сделать?