5. Южный разнобой. 2 октября

1. В таблице 10×10, все клетки которой заполнены числами $+1$ и -1, ровно k строк с положительной суммой и ровно k столбцов с отрицательной суммой. При каком наибольшем k такое возможно?

2. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $BC \parallel AE$, $BC = \frac{1}{2}AE$, $DE \parallel AB$ и $DE = \frac{1}{2}AB$. Докажите, что $CD \parallel BE$ и $CD = \frac{1}{2}BE$.

3. Найдите все тройки натуральных чисел (m, n, p), где p – простое и $m^4 = 4(p^n - 1)$.

4. Дано натуральное $n \geqslant 3$. Арним задумал натуральное число, не превосходящее n, а Брентано (которому известно n) пытается его угадать. Каждым ходом Брентано называет число. Если оно совпадает с числом Арнима, тот говорит «угадал», и игра заканчивается, а если нет, Арним изменяет (уменьшает или увеличивает) своё число на 1. Число Арнима всегда остаётся натуральным, но может стать больше n. Докажите, что Брентано сумеет угадать число Арнима за $3n - 5$ попыток.

5. Докажите, что

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b} + \frac{b^3+3c^3}{5b+c} + \frac{c^3+3a^3}{5c+a} \geqslant \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

при всех положительных a, b, c.

6. Внутри треугольника ABC с описанной окружностью ω выбрана точка P. Прямые AP, BP, CP пересекают стороны BC, CA, AB в точках D, E, F, соответственно. Точка M – середина стороны BC, описанная окружность треугольника AEF пересекает ω в точке S, луч SD пересекает ω в точке X. Наконец, луч XM пересекает ω в точке Y. Докажите, что прямая AY касается описанной окружности треугольника AEF.

7. Дано множество S из 68 натуральных чисел, не превосходящих 2021. Докажите, что из множества S можно выбрать три непересекающихся подмножества, у которых равны количества элементов и суммы элементов.

8. Докажите, что для любого нечётного простого числа p количество натуральных n, для которых $n! + 1$ делится на p, не превосходит $cp^{2/3}$, где c – некоторая константа, не зависящая от p.

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2021

5. Южный разнобой. 2 октября

1. В таблице 10×10, все клетки которой заполнены числами $+1$ и -1, ровно k строк с положительной суммой и ровно k столбцов с отрицательной суммой. При каком наибольшем k такое возможно?

2. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $BC \parallel AE$, $BC = \frac{1}{2}AE$, $DE \parallel AB$ и $DE = \frac{1}{2}AB$. Докажите, что $CD \parallel BE$ и $CD = \frac{1}{2}BE$.

3. Найдите все тройки натуральных чисел (m, n, p), где p – простое и $m^4 = 4(p^n - 1)$.

4. Дано натуральное $n \geqslant 3$. Арним задумал натуральное число, не превосходящее n, а Брентано (которому известно n) пытается его угадать. Каждым ходом Брентано называет число. Если оно совпадает с числом Арнима, тот говорит «угадал», и игра заканчивается, а если нет, Арним изменяет (уменьшает или увеличивает) своё число на 1. Число Арнима всегда остаётся натуральным, но может стать больше n. Докажите, что Брентано сумеет угадать число Арнима за $3n - 5$ попыток.

5. Докажите, что

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b} + \frac{b^3+3c^3}{5b+c} + \frac{c^3+3a^3}{5c+a} \geqslant \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

при всех положительных a, b, c.

6. Внутри треугольника ABC с описанной окружностью ω выбрана точка P. Прямые AP, BP, CP пересекают стороны BC, CA, AB в точках D, E, F, соответственно. Точка M – середина стороны BC, описанная окружность треугольника AEF пересекает ω в точке S, луч SD пересекает ω в точке X. Наконец, луч XM пересекает ω в точке Y. Докажите, что прямая AY касается описанной окружности треугольника AEF.

7. Дано множество S из 68 натуральных чисел, не превосходящих 2021. Докажите, что из множества S можно выбрать три непересекающихся подмножества, у которых равны количества элементов и суммы элементов.

8. Докажите, что для любого нечётного простого числа p количество натуральных n, для которых $n! + 1$ делится на p, не превосходит $cp^{2/3}$, где c – некоторая константа, не зависящая от p.