

## 7. Конечные плоскости. 3 октября

**Определение.** Множество (*точки*), и некоторые его подмножества (*прямые*), называется *конечной проективной плоскостью*, если выполнены следующие условия:

- АХ1: через две точки проходит ровно одна прямая;  
 АХ2: любые две прямые пересекаются ровно по одной точке;  
 АХ3: на каждой прямой не менее трёх точек;  
 АХ4: существует не менее двух прямых.

1. а) Докажите, что если на какой-то прямой конечной проективной плоскости  $n + 1$  точка, то на любой прямой  $n + 1$  точка.
- б) Докажите, что через каждую точку проходит ровно  $n + 1$  прямая.
- в) Сколько тогда всего точек на плоскости?

**Определение.** Множество (*точки*), и некоторые его подмножества (*прямые*), называется *конечной аффинной плоскостью*, если выполнены следующие условия:

- АХ1: через две точки проходит ровно одна прямая;  
 АХ2: через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной;  
 АХ3: на каждой прямой не менее двух точек;  
 АХ4: существует не менее двух прямых.

2. а) Докажите, что если на какой-то прямой конечной аффинной плоскости  $n$  точек, то на любой прямой  $n$  точек.
- б) Докажите, что через каждую точку проходит  $n + 1$  прямая.
- в) Сколько тогда всего точек на плоскости?

**Определение.** Числа  $n$  из предыдущих задач называются *порядками* соответствующих конечных плоскостей.

3. Докажите, что конечная аффинная плоскость порядка  $n$  существует тогда и только тогда, когда существует конечная проективная плоскость порядка  $n$ .

4. Даны 1985 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 1985 множеств?

5. В классе ученики ходят на 10 кружков, каждый кружок посещают четверо, и для любых двух кружков есть только один ученик, который ходит на оба кружка. Сколько может быть учеников в классе?

## 7. Конечные плоскости. 3 октября

**Определение.** Множество (*точки*), и некоторые его подмножества (*прямые*), называется *конечной проективной плоскостью*, если выполнены следующие условия:

- АХ1: через две точки проходит ровно одна прямая;  
 АХ2: любые две прямые пересекаются ровно по одной точке;  
 АХ3: на каждой прямой не менее трёх точек;  
 АХ4: существует не менее двух прямых.

1. а) Докажите, что если на какой-то прямой конечной проективной плоскости  $n + 1$  точка, то на любой прямой  $n + 1$  точка.
- б) Докажите, что через каждую точку проходит ровно  $n + 1$  прямая.
- в) Сколько тогда всего точек на плоскости?

**Определение.** Множество (*точки*), и некоторые его подмножества (*прямые*), называется *конечной аффинной плоскостью*, если выполнены следующие условия:

- АХ1: через две точки проходит ровно одна прямая;  
 АХ2: через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной;  
 АХ3: на каждой прямой не менее двух точек;  
 АХ4: существует не менее двух прямых.

2. а) Докажите, что если на какой-то прямой конечной аффинной плоскости  $n$  точек, то на любой прямой  $n$  точек.
- б) Докажите, что через каждую точку проходит  $n + 1$  прямая.
- в) Сколько тогда всего точек на плоскости?

**Определение.** Числа  $n$  из предыдущих задач называются *порядками* соответствующих конечных плоскостей.

3. Докажите, что конечная аффинная плоскость порядка  $n$  существует тогда и только тогда, когда существует конечная проективная плоскость порядка  $n$ .

4. Даны 1985 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 1985 множеств?

5. В классе ученики ходят на 10 кружков, каждый кружок посещают четверо, и для любых двух кружков есть только один ученик, который ходит на оба кружка. Сколько может быть учеников в классе?