11. Подсчёт двумя способами. 7 октября

Мысль. Достаточно часто двойной подсчёт устроен как подсчёт пар вида (a, b), где a и b как-то связаны между собой: первый раз мы считаем это количество, вначале выбирая a, второй раз — вначале выбирая b.

Например, пусть мы считаем количество пар $(\text{элемент}, \text{подмножество})$, причём элемент должен лежать в подмножестве. Если мы вначале выбрали элемент a, то пар, у которых на первом месте стоит a, ровно столько, сколько существует подмножеств, содержащих a. Если мы вначале выбрали подмножество b, то пар, у которых на втором месте стоит b, ровно столько, сколько существует элементов в b.

Возможно следующие описания помогут вам лучше понять происходящее:

- каждой подходящей паре можно выдавать по *флагу* и считать количество выданных флагов;
- можно ввести двудольный граф, где доли — это возможные значения координат, ребро проводится, если выбранная пара удовлетворяет условию, а подсчитываются количества рёбер; в этом случае мы вначале считаем сумму степеней одной доли, а потом — другой доли;
- можно ввести *матрицу инцидентностей*, т.е. таблицу, у которой строки соответствуют возможным значениям первой координаты, столбцы — второй координаты, а в ячейках стоят 0 и 1, где 1 стоит на пересечении строки a и столбца b, если пара (a, b) подходит под условие; тогда вначале мы считаем количество единиц, суммируя по строкам, а затем — по столбцам.

Обычно условие «подсказывает» пары чего нужно считать.

1. Даны шесть 4-элементных подмножеств множества из 8 элементов, причём каждый из этих элементов лежит ровно в m множествах. Найдите m.

1.4. В парламенте несколько человек, они образовали несколько комитетов, при этом все комитеты имеют одинаковую численность. Для каждой пары парламентёров количество комитетов, в которые они оба входят, одинаковое, т.е. не зависит от того, какую пару парламентёров мы выбрали. Докажите, что все парламентёры входят в одно и то же число комитетов.

2. На соревновании присутствовали a участников и нечётное число b судей. Каждый судья про каждого участника сказал «Огонь!» или «Чёт не огонь». Пусть k — такое число, что для любых двух судей количество участников, про которых они оба сказали одно и то же не больше k. Докажите, что $\dfrac{k}{a} \geqslant \dfrac{b-1}{2b}$.

3. Докажите, что при любой триангуляции многоугольника, количество треугольников, у которых нет сторон, совпадающих со сторонами многоугольника, ровно на 2 меньше, чем количество треугольников, у которых две стороны совпадают со сторонами многоугольника.

4. Дано натуральное число $n > 1$. Найдите наибольшее возможное значение числа m такое, что существует mn-элементное множество S и такие $2n$ его m-элементных подмножеств, что каждые два из них пересекаются не более чем по одному элементу, а каждый элемент принадлежит ровно двум подмножествам.

5. Имеются три непересекающиеся комиссии бюрократов. Любые два бюрократа либо знакомы друг с другом, либо незнакомы. Известно, что для каждой пары бюрократов из разных комиссий, среди членов оставшейся комиссии есть ровно 10 бюрократов, которые знакомы с обоими, и ровно 10 бюрократов, которые незнакомы с обоими. Найдите общее число бюрократов в комиссиях.

6. Пусть $n \geqslant 5$ — натуральное число, причём $\text{НОД}(n, 6) = 1$. Вершины правильного n-угольника покрашены в три цвета, причём вершин каждого цвета нечётное количество. Докажите, что существует равнобедренный треугольник, вершины которого покрашены в три разных цвета.

7. Клетчатый прямоугольник со сторонами, большими одной клетки, разбит на домино. Пусть A — это количество квадратов 2×2, состоящих из двух домино, а B — количество квадратов 2×2, состоящих из клеток четырёх различных домино. Докажите, что $A > B$.

8. В университете 10 001 студент, она образовали несколько клубов (один студент может посещать несколько клубов), клубы образовали k сообществ (один клуб может входить в несколько сообществ). Известно, что:

- для каждой пары студентов есть ровно один клуб, в который они оба ходят;
- для каждого студента и каждого сообщества существует ровно один клуб этого сообщества, в который ходит этот студент;
- в каждом клубе нечётное число студентов; если в клубе $2m + 1$ студент, то клуб входит в m сообществ.

Найдите все возможные значения числа k.

9. На плоскости отмечены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что количество треугольников с вершинами в данных точках, площадь которых равна 1, не превосходит $\frac{2}{3}(n^2 - n)$.

10. На олимпиаду приехали несколько школьников, которым предложили 6 задач. Каждая пара задач была одновременно решена более чем $2/5$ всех участников. Никто не решил все 6 задач. Докажите, что есть по крайней мере 2 участника, каждый из которых решил по 5 задач.