

13. Квадратичный закон взаимности: задачи. 8 октября

Мысль. В основном квадратичный закон взаимности используется, чтобы ответить на вопрос «Для каких простых p данное число a является квадратичным вычетом?»

1. Для каких простых p число а) 3; б) -3 является квадратичным вычетом?

2. Докажите, что у чисел вида $n^2 - 2$ и $2n^2 - 1$ не может быть делителей (даже составных) вида $8k \pm 5$.

3. Докажите, что число $4nm - n - m$ не может является квадратом натурального числа ни для каких натуральных n и m . Почему утверждение станет неверным для целых n и m ?

4. Докажите, что если n и m больше 2, то $n^2 + 1$ не делится на $m^2 - 5$.

5. Докажите, что все нечётные делители числа $5x^2 + 1$ имеют чётную цифру десятков.

6. Докажите, что $3^n - 1$ не делится на $2^n - 1$ ни при каком натуральном n .

7. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2$ не делится на $3(ab + bc + ca)$ ни при каких натуральных a, b, c .

8. Докажите, что число $5^n - 1$ не делится на $2^n + 1$ ни при каком натуральном n .

9. Дано натуральное a . Докажите, что существует натуральное b со следующим свойством: для любого простого p такого, что $p - 1$ делится на b , число a не является первообразным корнем по модулю p .

10. Пусть $k = 2^{2^n} + 1$. Докажите, что k — простое тогда и только тогда, когда $3^{(k-1)/2} + 1$ делится на k .

13. Квадратичный закон взаимности: задачи. 8 октября

Мысль. В основном квадратичный закон взаимности используется, чтобы ответить на вопрос «Для каких простых p данное число a является квадратичным вычетом?»

1. Для каких простых p число а) 3; б) -3 является квадратичным вычетом?

2. Докажите, что у чисел вида $n^2 - 2$ и $2n^2 - 1$ не может быть делителей (даже составных) вида $8k \pm 5$.

3. Докажите, что число $4nm - n - m$ не может является квадратом натурального числа ни для каких натуральных n и m . Почему утверждение станет неверным для целых n и m ?

4. Докажите, что если n и m больше 2, то $n^2 + 1$ не делится на $m^2 - 5$.

5. Докажите, что все нечётные делители числа $5x^2 + 1$ имеют чётную цифру десятков.

6. Докажите, что $3^n - 1$ не делится на $2^n - 1$ ни при каком натуральном n .

7. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2$ не делится на $3(ab + bc + ca)$ ни при каких натуральных a, b, c .

8. Докажите, что число $5^n - 1$ не делится на $2^n + 1$ ни при каком натуральном n .

9. Дано натуральное a . Докажите, что существует натуральное b со следующим свойством: для любого простого p такого, что $p - 1$ делится на b , число a не является первообразным корнем по модулю p .

10. Пусть $k = 2^{2^n} + 1$. Докажите, что k — простое тогда и только тогда, когда $3^{(k-1)/2} + 1$ делится на k .