16. Разнобой–1. 11 октября

1[1]. На палке длиной 1 м расположены несколько материальных точек одинаковой массы. В какой-то момент времени они начинаются двигаться равномерно прямолинейно с некоторыми скоростями, наименьшая из которых равна 1 м/мин. Во время столкновений сохраняется энергия (т.е. $\frac{1}{2}\sum mv_i^2$) и импульс (т.е. $\sum m\vec{v_i}$), т.е. происходят абсолютно упругие удары. Пусть три точки никогда не оказывались в одной точке. Если точка вылазит за границы палки, то она падает с неё. Докажите, что через минуту на палке не останется ни одной материальной точки.

2. На каждом ребре куба написано некоторое натуральное число. За одно действие разрешается выбрать вершину куба и изменить числа на трёх выходящих из неё рёбрах по следующему правилу: число заменяется на сумму или разность (любую из двух) двух других; при этом ровно одно заменяется на сумму, а два — на разность. Это действие проделали несколько раз. Может ли теперь на каждом ребре стоять число 0?

3. В таблице $m \times n$ (m строк, n столбцов) некоторые клетки покрашены в чёрный цвет, а остальные — в белый. Известно, что в каждой строчке и в каждом столбце есть хотя бы одна чёрная клетка, и что если какая-то клетка чёрная, то в её столбце чёрных клеток не меньше, чем в её строке. Докажите, что $m \geqslant n$.

[1] Немного физики

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2021

16. Разнобой–1. 11 октября

1[1]. На палке длиной 1 м расположены несколько материальных точек одинаковой массы. В какой-то момент времени они начинаются двигаться равномерно прямолинейно с некоторыми скоростями, наименьшая из которых равна 1 м/мин. Во время столкновений сохраняется энергия (т.е. $\frac{1}{2}\sum mv_i^2$) и импульс (т.е. $\sum m\vec{v_i}$), т.е. происходят абсолютно упругие удары. Пусть три точки никогда не оказывались в одной точке. Если точка вылазит за границы палки, то она падает с неё. Докажите, что через минуту на палке не останется ни одной материальной точки.

2. На каждом ребре куба написано некоторое натуральное число. За одно действие разрешается выбрать вершину куба и изменить числа на трёх выходящих из неё рёбрах по следующему правилу: число заменяется на сумму или разность (любую из двух) двух других; при этом ровно одно заменяется на сумму, а два — на разность. Это действие проделали несколько раз. Может ли теперь на каждом ребре стоять число 0?

3. В таблице $m \times n$ (m строк, n столбцов) некоторые клетки покрашены в чёрный цвет, а остальные — в белый. Известно, что в каждой строчке и в каждом столбце есть хотя бы одна чёрная клетка, и что если какая-то клетка чёрная, то в её столбце чёрных клеток не меньше, чем в её строке. Докажите, что $m \geqslant n$.

[1] Немного физики