17. Гауссовы целые числа: теория. 12 октября

Определение. Основным объектом изучения этого листочка будет *кольцо гауссовых целых чисел*:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi\colon a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

Для числа $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ определим его *норму*

$$N(\alpha) = \alpha \cdot \overline{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

0_1. Докажите, что для любых α, β выполнено $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, откуда, если $\alpha \vdots \beta$, то $N(\alpha) \vdots N(\beta)$.

1. a) Докажите, что обратимыми элементами $\mathbb{Z}[i]$ являются ± 1, $\pm i$ и только они.
b) Докажите, что α делится на $1 + i$ если и только если $N(\alpha) \vdots 2$.
c) Верно ли, что если $N(\alpha) \vdots 5$, то $\alpha \vdots 1 + 2i$?

2. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[i]$ является евклидовым относительно введённой нормы N. *Напоминание: коммутативное, ассоциативное, с единицей, без делителей нуля, $N(ab) \geqslant N(a)$, $N(ab) = N(a) \Leftrightarrow b$ обратим, деление с остатком.*

3. Докажите, если целые числа a и b взаимно просты в $\mathbb{Z}$, то они взаимно просты и в $\mathbb{Z}[i]$.

4. Докажите, что если $N(\alpha)$ является простым числом в $\mathbb{Z}$, то α является простым числом в $\mathbb{Z}[i]$.

5. a) Пусть π — простое гауссово число. Докажите, что для некоторого простого p из $\mathbb{Z}$ выполнено $p \vdots \pi$.
b) Докажите, что простое число p из $\mathbb{Z}$ является составным в $\mathbb{Z}[i]$ если и только если оно представляется в виде суммы двух полных квадратов.
c) Докажите, что если для целых чисел n и x выполнено $x^2 + 1 \vdots n$, то n не может является простым гауссовым числом.
d) В зависимости от остатка при делении на 4 числа p из пункта a) опишите все простые гауссовы числа.

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2021

17. Гауссовы целые числа: теория. 12 октября

Определение. Основным объектом изучения этого листочка будет *кольцо гауссовых целых чисел*:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi\colon a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

Для числа $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ определим его *норму*

$$N(\alpha) = \alpha \cdot \overline{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

0_1. Докажите, что для любых α, β выполнено $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$, откуда, если $\alpha \vdots \beta$, то $N(\alpha) \vdots N(\beta)$.

1. a) Докажите, что обратимыми элементами $\mathbb{Z}[i]$ являются ± 1, $\pm i$ и только они.
b) Докажите, что α делится на $1 + i$ если и только если $N(\alpha) \vdots 2$.
c) Верно ли, что если $N(\alpha) \vdots 5$, то $\alpha \vdots 1 + 2i$?

2. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[i]$ является евклидовым относительно введённой нормы N. *Напоминание: коммутативное, ассоциативное, с единицей, без делителей нуля, $N(ab) \geqslant N(a)$, $N(ab) = N(a) \Leftrightarrow b$ обратим, деление с остатком.*

3. Докажите, если целые числа a и b взаимно просты в $\mathbb{Z}$, то они взаимно просты и в $\mathbb{Z}[i]$.

4. Докажите, что если $N(\alpha)$ является простым числом в $\mathbb{Z}$, то α является простым числом в $\mathbb{Z}[i]$.

5. a) Пусть π — простое гауссово число. Докажите, что для некоторого простого p из $\mathbb{Z}$ выполнено $p \vdots \pi$.
b) Докажите, что простое число p из $\mathbb{Z}$ является составным в $\mathbb{Z}[i]$ если и только если оно представляется в виде суммы двух полных квадратов.
c) Докажите, что если для целых чисел n и x выполнено $x^2 + 1 \vdots n$, то n не может является простым гауссовым числом.
d) В зависимости от остатка при делении на 4 числа p из пункта a) опишите все простые гауссовы числа.