18. Гауссовы целые числа: задачи. 13 октября

1. Докажите, что каждое простое число вида $4k+1$ можно единственным образом представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

2. a) Опишите, используя гауссовы целые числа, все решения уравнения $a^2+b^2=c^2$ в натуральных числах.
b) Опишите все решения уравнения $a^2+b^2=c^3$ в натуральных числах.

3. a) Решите в целых числах уравнение $x^2+4=y^3$.
b) Докажите, что уравнение $x^n=y^2+1$ $(n>1)$ не имеет решений в натуральных числах.

4. Натуральные числа x, y и z таковы, что $xy=z^2+1$. Докажите, что найдутся такие целые a, b, c и d, что $x=a^2+b^2$, $y=c^2+d^2$, $z=ac+bd$.

5. Найдите все пары простых чисел p и q (не обязательно различных), для которых числа $2p-1$, $2q-1$ и $2pq-1$ являются квадратами натуральных чисел.

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2021

18. Гауссовы целые числа: задачи. 13 октября

1. Докажите, что каждое простое число вида $4k+1$ можно единственным образом представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

2. a) Опишите, используя гауссовы целые числа, все решения уравнения $a^2+b^2=c^2$ в натуральных числах.
b) Опишите все решения уравнения $a^2+b^2=c^3$ в натуральных числах.

3. a) Решите в целых числах уравнение $x^2+4=y^3$.
b) Докажите, что уравнение $x^n=y^2+1$ $(n>1)$ не имеет решений в натуральных числах.

4. Натуральные числа x, y и z таковы, что $xy=z^2+1$. Докажите, что найдутся такие целые a, b, c и d, что $x=a^2+b^2$, $y=c^2+d^2$, $z=ac+bd$.

5. Найдите все пары простых чисел p и q (не обязательно различных), для которых числа $2p-1$, $2q-1$ и $2pq-1$ являются квадратами натуральных чисел.