21. Последовательное конструирование. 16 октября

1. Пусть k — натуральное число. В графе G более $2(k-1)^2$ рёбер. Докажите, что в нём есть или паросочетание с k рёбрами, или подграф $K_{1,k}$.

2. Пусть n — натуральное число. Для какого наименьшего k любые числа из отрезка $[0,1]$, сумма которых равна n, можно разбить на k групп (возможно, пустых), сумма в каждой из которых не больше 1?

3. Пусть $a \neq b$ — натуральные числа. Скажем, что натуральные числа $x < y < z$ образуют *шаблон*, если $\{y-x, z-y\} = \{a, b\}$. Докажите, что все натуральные числа можно разбить на шаблоны.

4. Пусть A — 101-элементное подмножество $S = \{1, 2, \ldots, 10^6\}$. Докажите, что существуют такие числа t_1, t_2, …, t_ℓ из S, что множества $A + t_k$ попарно не пересекаются. a) $\ell = 100$; b) $\ell = 198$.

5. Дано натуральное число n. У Арины есть k двусторонних карточек, на каждой из которых каждое из чисел от 1 до n написано ровно по одному разу (часть — на одной стороне, оставшиеся — на другой). При каком наименьшем k Арина сможет выложить эти карточки так, что на видимых сторонах встречаются все числа от 1 до n?

6. На плоскости отмечены n точек. Будем говорить, что пара точек *выровнена*, если у них или одинаковые абсциссы, или одинаковые ординаты. Докажите, что каждую из этих точек можно покрасить в какой-то цвет так, что все точки одного цвета лежат на одной прямой, и существует не более $n^{3/2}$ пар точек, которые выровнены, но разного цвета.

7. Даны натуральные числа n и t. В спортивной лиге каждой команде присвоены не более t из n различных цветов. Каждый из n цветов присвоен хотя бы одной команде. Множество команд S называется *цвето-разделяемым*, если каждая команда в S может выбрать один из присвоенных ей цветов так, что этот цвет не совпадает ни с одним из цветов, который присвоен какой-то другой команде из S. Какое гарантированное количество команд можно выбрать так, чтобы они образовывали цвето-разделяемое множество?

8. Дано $n \geqslant 2$ попарно различных целых чисел a_1, a_2, …, a_n. Докажите, что существует целое x, отличное от a_i, такое, что среди чисел $v_2(x-a_1)$, $v_2(x-a_2)$, …, $v_2(x-a_n)$ чётных и нечётных хотя бы по $n/4$.

9. Банк Кейптауна выпускает монеты номиналом $\frac{1}{n}$ для каждого целого положительного числа n. Дан конечный набор таких монет, сумма номиналов которых не превосходит $99 + \frac{1}{2}$ (номиналы монет не обязательно различны). Докажите, что все монеты этого набора можно разбить на 100 или меньшее число групп так, чтобы сумма номиналов монет в каждой группе не превышала 1.

10. Будем говорить, что прямые на плоскости являются прямыми *общего положения*, если никакие две из них не параллельны и никакие три из них не проходят через одну точку. Любые несколько прямых общего положения разбивают плоскость на части; *ограниченными* частями разбиения будем называть те из частей, которые имеют конечную площадь. Докажите, что для всех достаточно больших n верно следующее утверждение: в каждом множестве из n прямых общего положения можно покрасить не менее $\sqrt{n}$ прямых в синий цвет так, чтобы граница любой из ограниченных частей разбиения не оказалась полностью синей.