

**22. Конечные плоскости: существование. 17 октября**

**1.** Пусть  $p$  — простое число. Докажите, что существует конечная аффинная плоскость порядка  $p$ . Как следствие, существует и конечная проективная плоскость порядка  $p$ .

**Комментарий.** В задаче **1.** можно заменить  $p$  на  $p^k$ . Верна следующая теорема Брука–Райзера, 1949:

если конечная проективная плоскость порядка  $q$  существует и  $q \equiv 1, 2 \pmod{4}$ , то  $q$  должно быть суммой двух квадратов.

Теорема, например, исключает существование проективных плоскостей порядков 6 и 14, но позволяет существование плоскостей порядков 10 и 12. В 1988 году с помощью компьютера было доказано, что плоскости порядка 10 не существуют.

**2.** Из 25 космонавтов нужно выбрать пятерых — экипаж космического корабля. Тренировки проводятся с пятью экипажами по 5 человек в каждом. Можно ли составить расписание тренировок таким образом, чтобы любые два космонавта побывали в одном экипаже ровно один раз?

**3.** Какое наибольшее количество клеток можно отметить в квадрате  $57 \times 57$  так, чтобы в пересечении любых двух строк и двух столбцов была хотя бы одна неотмеченная клетка?

**4.** Имеется 25 полей для посевов, расположенных в форме квадрата  $5 \times 5$ . На исследование поступили 5 сортов пшеницы, 5 удобрений, 5 инсектицидов и 5 способов полива. Докажите, что можно на каждом поле выбрать по сорту пшеницы, по удобрению, по инсектициду и по способу полива, чтобы в каждой строчке и в каждом столбце встречались все сорта, все удобрения, все инсектициды и все способы полива, и чтобы для каждой пары исследуемых объектов, было поле где они одновременно выбраны.

**5.** Докажите, что в множестве из 400 элементов можно выбрать 400 подмножеств, каждое из 57 элементов, так, что любые два из них пересекаются ровно по 8 элементам.

*Не забудьте перевернуть листочек!*

**22. Конечные плоскости: существование. 17 октября**

**1.** Пусть  $p$  — простое число. Докажите, что существует конечная аффинная плоскость порядка  $p$ . Как следствие, существует и конечная проективная плоскость порядка  $p$ .

**Комментарий.** В задаче **1.** можно заменить  $p$  на  $p^k$ . Верна следующая теорема Брука–Райзера, 1949:

если конечная проективная плоскость порядка  $q$  существует и  $q \equiv 1, 2 \pmod{4}$ , то  $q$  должно быть суммой двух квадратов.

Теорема, например, исключает существование проективных плоскостей порядков 6 и 14, но позволяет существование плоскостей порядков 10 и 12. В 1988 году с помощью компьютера было доказано, что плоскости порядка 10 не существуют.

**2.** Из 25 космонавтов нужно выбрать пятерых — экипаж космического корабля. Тренировки проводятся с пятью экипажами по 5 человек в каждом. Можно ли составить расписание тренировок таким образом, чтобы любые два космонавта побывали в одном экипаже ровно один раз?

**3.** Какое наибольшее количество клеток можно отметить в квадрате  $57 \times 57$  так, чтобы в пересечении любых двух строк и двух столбцов была хотя бы одна неотмеченная клетка?

**4.** Имеется 25 полей для посевов, расположенных в форме квадрата  $5 \times 5$ . На исследование поступили 5 сортов пшеницы, 5 удобрений, 5 инсектицидов и 5 способов полива. Докажите, что можно на каждом поле выбрать по сорту пшеницы, по удобрению, по инсектициду и по способу полива, чтобы в каждой строчке и в каждом столбце встречались все сорта, все удобрения, все инсектициды и все способы полива, и чтобы для каждой пары исследуемых объектов, было поле где они одновременно выбраны.

**5.** Докажите, что в множестве из 400 элементов можно выбрать 400 подмножеств, каждое из 57 элементов, так, что любые два из них пересекаются ровно по 8 элементам.

*Не забудьте перевернуть листочек!*

**6.** Два шерифа соседних городов составили список из 7 подозреваемых в качестве серийного убийцы. Потом каждый из них, проведя оперативно-разыскные действия, сократил список подозреваемых до двух человек. Эти списки различны, т. е. пересекаются только по одному подозреваемому, поэтому шерифы, обменявшись информацией, могут совместно арестовать убийцу (а в одиночку они этого сделать не могут). Но если эта информация будет перехвачена и станет известна жителям, то они поймут, кто убийца, и линчуют его, не дожидаясь ареста (список из семи подозреваемых им известен). Как шерифам обменяться информацией, чтобы арестовать убийцу (и тем самым не допустить суда Линча)?

**7.** В пространстве даны 200 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причём отрезки не пересекаются друг с другом. Каждый отрезок покрашен в один из десяти цветов. Петя хочет покрасить каждую точку в один из этих цветов так, чтобы не нашлось двух точек и отрезка между ними, окрашенных в один цвет. Обязательно ли Пете это удастся?

**6.** Два шерифа соседних городов составили список из 7 подозреваемых в качестве серийного убийцы. Потом каждый из них, проведя оперативно-разыскные действия, сократил список подозреваемых до двух человек. Эти списки различны, т. е. пересекаются только по одному подозреваемому, поэтому шерифы, обменявшись информацией, могут совместно арестовать убийцу (а в одиночку они этого сделать не могут). Но если эта информация будет перехвачена и станет известна жителям, то они поймут, кто убийца, и линчуют его, не дожидаясь ареста (список из семи подозреваемых им известен). Как шерифам обменяться информацией, чтобы арестовать убийцу (и тем самым не допустить суда Линча)?

**7.** В пространстве даны 200 точек. Каждые две из них соединены отрезком, причём отрезки не пересекаются друг с другом. Каждый отрезок покрашен в один из десяти цветов. Петя хочет покрасить каждую точку в один из этих цветов так, чтобы не нашлось двух точек и отрезка между ними, окрашенных в один цвет. Обязательно ли Пете это удастся?