26. Стрельба фишками: разные задачи. 19 октября

1. Имеется n коробок $B_1, \ldots, B_n$, в них как-то разложены n шаров. За один ход можно

- или переместить шар из B_1 в B_2;
- или переместить шар из B_n в B_{n-1};
- или переместить два шара из B_k в B_{k-1} и B_{k+1}, $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Докажите, что можно добиться того, что в каждой коробке лежит по одному шару.

2. В ячейке с номером 1 лежат n элешей. За один ход можно переместить элеш из ячейки с номером k в ячейку с номером $k+1$, если в ячейке с номером k элешей хотя бы на 2 больше, чем в ячейке с номером $k+1$. Докажите, что финальная конфигурация элешей не зависит от порядка действий. *По 20.4 всё ещё можно получить «+», если в ней придумать решение через непреодолимые ситуации.*

3. Имеется бесконечная полоска, ячейки которой занумерованы целыми числами. В ячейке с номером 0 лежит $2n-1$ камень. За один ход разрешается выбрать ячейку с номером k и, если в ней хотя бы два камня, переложить один из них в ячейку с номером $k+1$, а другой — в ячейку с номером $k-1$. Докажите, что ни в какой момент времени в ячейке с номером n не будет камня.

4. Некоторое количество карточек разложено по вершинам $A_1, A_2, \ldots, A_n$ правильного n-угольника, а также в его центре O. Разрешается делать одну из следующих операций:

- если в точке A_i хотя бы 3 карточки, то можно переложить по одной карточке в точки A_{i-1}, A_{i+1} и O (нумерация по модулю n);
- если в точке O хотя бы n карточек, то можно переложить по одной карточке в точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Докажите, что если карточек хотя бы n^2+3n+1, то можно добиться того, чтобы в каждой из $n+1$ точек было хотя бы по $n+1$ карточке.

5. Даны два взаимно простых числа натуральных числа p и q. На доске написаны n натуральных чисел. За один ход разрешается выбрать два одинаковых числа a и a и поменять их на числа $a+p$ и $a+q$. При каком наименьшем n такой процесс может продолжаться бесконечно долго?

Октябрьская математическая программа, 11А «Сириус», октябрь 2021

26. Стрельба фишками: разные задачи. 19 октября

1. Имеется n коробок $B_1, \ldots, B_n$, в них как-то разложены n шаров. За один ход можно

- или переместить шар из B_1 в B_2;
- или переместить шар из B_n в B_{n-1};
- или переместить два шара из B_k в B_{k-1} и B_{k+1}, $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Докажите, что можно добиться того, что в каждой коробке лежит по одному шару.

2. В ячейке с номером 1 лежат n элешей. За один ход можно переместить элеш из ячейки с номером k в ячейку с номером $k+1$, если в ячейке с номером k элешей хотя бы на 2 больше, чем в ячейке с номером $k+1$. Докажите, что финальная конфигурация элешей не зависит от порядка действий. *По 20.4 всё ещё можно получить «+», если в ней придумать решение через непреодолимые ситуации.*

3. Имеется бесконечная полоска, ячейки которой занумерованы целыми числами. В ячейке с номером 0 лежит $2n-1$ камень. За один ход разрешается выбрать ячейку с номером k и, если в ней хотя бы два камня, переложить один из них в ячейку с номером $k+1$, а другой — в ячейку с номером $k-1$. Докажите, что ни в какой момент времени в ячейке с номером n не будет камня.

4. Некоторое количество карточек разложено по вершинам $A_1, A_2, \ldots, A_n$ правильного n-угольника, а также в его центре O. Разрешается делать одну из следующих операций:

- если в точке A_i хотя бы 3 карточки, то можно переложить по одной карточке в точки A_{i-1}, A_{i+1} и O (нумерация по модулю n);
- если в точке O хотя бы n карточек, то можно переложить по одной карточке в точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Докажите, что если карточек хотя бы n^2+3n+1, то можно добиться того, чтобы в каждой из $n+1$ точек было хотя бы по $n+1$ карточке.

5. Даны два взаимно простых числа натуральных числа p и q. На доске написаны n натуральных чисел. За один ход разрешается выбрать два одинаковых числа a и a и поменять их на числа $a+p$ и $a+q$. При каком наименьшем n такой процесс может продолжаться бесконечно долго?