28. МеждусоБой. 21 октября

1. Пусть T_1, T_2, T_3, T_4 — попарно различные точки плоскости, лежащие на одной прямой, причём T_2 лежит между T_1 и T_3, а T_3 лежит между T_2 и T_4. Пусть ω_1 — окружность, проходящая через точки T_1 и T_4; ω_2 — окружность, проходящая через точку T_2 и касающаяся ω_1 в точке T_1 внутренним образом; ω_3 — окружность, проходящая через точку T_3 и касающаяся ω_2 в точке T_2 внешним образом; ω_4 — окружность, проходящая через точку T_4 и касающаяся ω_3 в точке T_3 внешним образом. Некоторая прямая пересекает ω_1 в точках P и W, ω_2 в точках Q и R, ω_3 в точках S и T и ω_4 в точках U и V, причём порядок точек на прямой следующий: P, Q, R, S, T, U, V, W. Докажите, что $PQ + TU = RS + VW$.

2. Ксения и Сергей играют в следующую игру. Ксения загадывает положительное целое число N, не превосходящее 5000. Далее она определяет 20 попарно различных целых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ таких, что для каждого $k = 1, 2, \ldots, 20$ числа N и a_k сравнимы по модулю k. За один ход Сергей называет множество S из целых положительных чисел, не превосходящих 20, и она произносит в ответ множество $\{a_k : k \in S\}$, не уточняя, какие произнесённые числа соответствуют каким индексам. Сколько ходов потребуется Сергею, чтобы определить наверняка, какое именно число загадала Ксения?

3. Рассмотрим целое число $n \geqslant 2$ и выпишем на доску числа $1, 2, \ldots, n$. За один ход разрешается стереть любые два числа a и b и после этого для каждого числа c из $\{a+b, |a-b|\}$ дописать на доску c, если числа c на доске нет (а если c присутствует на доске, второй раз число c не дописывается). Для каждого целого числа $n \geqslant 2$ определите, возможно ли после конечного числа ходов оставить на доске ровно два числа.

4. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Пусть H и O — ортоцентр и центр описанной окружности соответственно. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Лучи MH и NH пересекают ω в точках P и Q соответственно. Прямые MN и PQ пересекаются в точке R. Докажите, что $OA \perp RA$.

5. В классе каждые два ученика или дружат, или враждуют. Для каждого ученика среди любых трёх его друзей всегда нечётное число пар друзей. Докажите, что можно каждому из учеников назначить по два куратора так, чтобы у любой пары друзей был ровно один общий куратор, у любой пары врагов не было общих кураторов, и никакие три куратора не образовывали *треугольник*, т.е. ситуации, в которой у каждой пары из них есть по общему ученику.

6. Докажите, что для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [1; \sqrt{2}]$ выполнено неравенство

$$\frac{\sqrt{x_1^2 - 1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_2^2 - 1}}{x_3} + \cdots + \frac{\sqrt{x_n^2 - 1}}{x_1} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} n.$$

7. На плоскости проведены 100 прямых. Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не может оказаться трех 70-угольников.

8. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такие, что для любых действительных a, b, c медиана чисел $f(a,b)$, $f(b,c)$, $f(c,a)$ равна медиане чисел a, b, c. Напомним, что медианой трёх действительных чисел, не обязательно различных, называется число, которое находится в середине, когда эти три числа расположены в неубывающем порядке.

9. Найдите все положительные целые n, для которых в каждую клетку таблицы $n \times n$ можно записать ровно одну из букв I, M или O так, что:

- в каждой строке и в каждом столбце ровно треть составляют буквы I, ровно треть составляют буквы M, и ровно треть составляют буквы O; а также
- на каждой из диагоналей, количество клеток которой кратно трём, ровно треть составляют буквы I, ровно треть составляют буквы M, и ровно треть составляют буквы O.

У таблицы $n \times n$ всего $4n - 2$ диагонали.

10. Дано натуральное $k \leqslant 16$. Среди 48 монет имеется ровно одна фальшивая, причем она весит либо в k раз, либо в $k+1$ раз, либо в $k+2$ раз больше, чем настоящая монета. Докажите, что можно за два взвешивания выяснить, какой из этих трех случаев имеет место.