27. Список вопросов и избранных задач к теоретическому зачёту. 20 октября

Версия 2, возможно, избыточная

1. Конечная проективная плоскость: аксиомы и свойства.

2. Конечная аффинная плоскости: аксиомы и свойства.

3. Равносильность существования конечной проективной и аффинной плоскостей порядка n.

4. Лемма Саваямы.

5. Окружности Тебо.

6. Определение устойчивого паросочетания, доказательство его существования через алгоритм Гейла–Шепли.

7. Квадратичный закон взаимности.

8. По каким простым числам 2 является квадратичным вычетом?

8. Гауссовы целые числа: евклидовость, описание всех простых чисел.

9. Критерий существования изогонально сопряженной точки в четырёхугольнике.

10. Существование конечной проективной плоскости: доказательство через пропорциональные наборы.

11. Стрельба фишками: конечность процесса на конечном графе в зависимости от количества фишек.

12. Стрельба фишками: конечность процесса на графе со стороком и на бесконечносм графе.

13. Стрельба фишками: инвариантность количества выстрелов в каждой вершине.

1.4. В парламенте несколько человек, они образовали несколько комитетов, при этом всхочете комитеты имеют одинаковую численность. Для каждой пары парламентёров количество комитетов, в которые они оба входят, одинаковое, т.е. не зависит от того, какую пару парламентёров мы выбрали. Докажите, что все парламентёры входят в одно и то же число комитетов.

6.3. Каждый из 18 человек знает какую-то уникальную новость. Каждый из них может написать другому письмо, в котором он может изложить все известные ему новости. Какое наименьшее количество писем должно быть отправлено, чтобы каждый узнал все 18 новостей?

8.8а. В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке K. В криволинейные треугольники ABK и CDK вписаны окружности. Докажите, что прямая, соединяющая середины дуг BC и AD делит общие внутренние касательные этих окружностей пополам.

9.5′. Докажите, что алгоритм Гейла–Шепли сопоставляет каждому мальчику лучшую из возможных для него в стабильном паросочетании девочку, а каждой девочке — худшего из возможных для неё мальчика.

11.4. Дано натуральное число $n > 1$. Найдите наибольшее возможное значение числа m такое, что существует mn-элементное множество S и такие $2n$ его m-элементных подмножеств, что каждые два из них пересекаются не более чем по одному элементу, а каждый элемент принадлежит ровно двум подмножествам.

13.6. Докажите, что $3^n - 1$ не делится на $2^n - 1$ ни при каком натуральном n.

16.3. В таблице $m \times n$ (m строк, n столбцов) некоторые клетки покрашены в чёрный цвет, а остальные — в белый. Известно, что в каждой строчке и в каждом столбце есть хотя бы одна чёрная клетка, и что если какая-то клетка чёрная, то в её столбце чёрных клеток не меньше, чем в её строке. Докажите, что $m \geqslant n$.

18.3а). Решите в целых числах уравнение $x^2 + 4 = y^3$.

19.3. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. На стороне BC выбраны точки M и N так, что N лежит между B и M, X — точка пересечения AM и DN. В треугольники MNX, ADX, ABM и DCN вписаны окружности с центрами J_1, J_2, J_3 и J_4 соответственно. Докажите, что их центры лежат на одной окружности.

21.7. Даны натуральные числа n и t. В спортивной лиге каждой команде присвоены не более t из n различных цветов. Каждый из n цветов присвоен хотя бы одной команде. Множество команд S называется *цвето-разделяемым*, если каждая команда в S может выбрать один из присвоенных ей цветов так, что этот цвет не совпадает ни с одним из цветов, который присвоен какой-то другой команде из S. Какое гарантированное количество команд можно выбрать так, чтобы они образовывали цвето-разделяемое множество?

22.3. Какое наибольшее количество клеток можно отметить в квадрате 57×57 так, чтобы в пересечении любых двух строк и двух столбцов была хотя бы одна неотмеченная клетка?

23.3. Имеется доска 100×100. В некоторых узлах этой доски сидит по муравью. В какой-то момент все они начинают ползти со скоростью 1, параллельно одному из краёв доски. Если два муравья, движущиеся в противоположных направлениях, сталкиваются, они оба поворачивают на 90° по часовой стрелке и продолжают ползти. Если сталкиваются больше чем два муравья, или если сталкиваются муравьи, ползущие в перпендикулярных направлениях, они не меняются своих направлений. Если муравей должет выползти за край доски, то он с неё падает. Докажите, что через 150,5 минут ни одного муравья на доске не останется.

25.2. Пусть $n = 2^k$. София задумала перестановку чисел от 1 до n, а Арина хочет её узнать. Для этого она может назвать Софии не более $k \cdot 2^k$ последовательностей длины n из нулей и единиц. София в каждой последовательности, названной Ариной, переставляет её элементы по задуманной перестановке. После этого Арина может спросить у Софии не более чем $k \cdot 2^k$ раз про последовательность длины n из нулей и единиц, есть ли она среди получившихся. По результатам этих действий Арина должна назвать перестановку. Помогите Арине.

25.3. В n-элементном множестве выбраны m различных собственных подмножеств; каждая пара элементов встречается ровно в одном подмножестве. Докажите, что $m \geqslant n$.