Многочлены–1: дополнительные задачи. 3 января

8. Пусть n — натуральное число. На $2n+1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении

$$* \cdot x^{2n} + * \cdot x^{2n-1} + \ldots + * \cdot x + *$$

так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Обязательно ли это можно сделать?

9. Докажите, что любой многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами можно представить в виде суммы трёх кубов многочленов с действительными коэффициентами.

10. Существуют ли такие многочлены P и Q с действительными коэффициентами, что $(P(x))^2 + (Q(x))^3 = x$?

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9-10 классы

Многочлены–1: дополнительные задачи. 3 января

8. Пусть n — натуральное число. На $2n+1$ карточках написано по ненулевому целому числу; сумма всех чисел также ненулевая. Требуется этими карточками заменить звёздочки в выражении

$$* \cdot x^{2n} + * \cdot x^{2n-1} + \ldots + * \cdot x + *$$

так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Обязательно ли это можно сделать?

9. Докажите, что любой многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами можно представить в виде суммы трёх кубов многочленов с действительными коэффициентами.

10. Существуют ли такие многочлены P и Q с действительными коэффициентами, что $(P(x))^2 + (Q(x))^3 = x$?