Многочлены–1: коэффициенты и значения. 3 января

Определение. *Многочленом степени* n называется формальная запись вида $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, где a_n, a_{n-1}, …, a_0 — действительные числа, называемые *коэффициентами* многочлена , $a_n \neq 0$, x — формальная переменная. Число a_n называется *старшим коэффициентом*, a_0 называется *свободным членом.*

Число 0 называется *нулевым многочленом.* Его степень не определена (также иногда её полагают равной -1 или $-\infty$).

1. Пусть $\deg P(x) = n$, $\deg Q(x) = m$. Что можно сказать о степени многочлена $P(x) + Q(x)$? $P(x) \cdot Q(x)$? $P(Q(x))$?

2. Найдите коэффициент многочлена $(x^8 + x^5 + 1)^{20}$ при a) x^{17};   b) x^{18}.

3. Пусть P – ненулевой многочлен. Могут ли все коэффициенты многочлена $P(x) \cdot (x - 1)$ быть неотрицательны?

4. Коэффициентами многочленов нечётной степени P и Q являются нечётные числа. Докажите, что у многочлена $P \cdot Q$ есть хотя бы один чётный коэффициент.

Определение. Многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ задает функцию $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, значение которой в точке x_0 равно $P(x_0) = a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_0$.

Число x_0 называется *корнем* многочлена P, если $P(x_0) = 0$.

5. a) Выразите числа $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$ через коэффициенты многочлена P.
b) Найдите сумму коэффициентов многочленов $(x + 2)^n$, $(x^2 - x + 1)^n$.
c) Найдите сумму коэффициентов при чётных степенях этих многочленов.

6. Решите задачи a) **3.** и b) **4.** другим способом.

7. a) $P(x) = (1 + x\sqrt{2})^{100}$. Докажите, что число $P(1) + P(-1)$ — целое.
b) Вычислите $C_{100}^0 + 3^2C_{100}^2 + \ldots + 3^{100}C_{100}^{100}$.
c*) Вычислите $C_{100}^0 + C_{100}^4 + \ldots + C_{100}^{100}$.
d*) Вычислите $C_{100}^0 + C_{100}^3 + \ldots + C_{100}^{99}$.

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9-10 классы

Многочлены–1: коэффициенты и значения. 3 января

Определение. *Многочленом степени* n называется формальная запись вида $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, где a_n, a_{n-1}, …, a_0 — действительные числа, называемые *коэффициентами* многочлена , $a_n \neq 0$, x — формальная переменная. Число a_n называется *старшим коэффициентом*, a_0 называется *свободным членом.*

Число 0 называется *нулевым многочленом.* Его степень не определена (также иногда её полагают равной -1 или $-\infty$).

1. Пусть $\deg P(x) = n$, $\deg Q(x) = m$. Что можно сказать о степени многочлена $P(x) + Q(x)$? $P(x) \cdot Q(x)$? $P(Q(x))$?

2. Найдите коэффициент многочлена $(x^8 + x^5 + 1)^{20}$ при a) x^{17};   b) x^{18}.

3. Пусть P – ненулевой многочлен. Могут ли все коэффициенты многочлена $P(x) \cdot (x - 1)$ быть неотрицательны?

4. Коэффициентами многочленов нечётной степени P и Q являются нечётные числа. Докажите, что у многочлена $P \cdot Q$ есть хотя бы один чётный коэффициент.

Определение. Многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ задает функцию $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, значение которой в точке x_0 равно $P(x_0) = a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_0$.

Число x_0 называется *корнем* многочлена P, если $P(x_0) = 0$.

5. a) Выразите числа $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$ через коэффициенты многочлена P.
b) Найдите сумму коэффициентов многочленов $(x + 2)^n$, $(x^2 - x + 1)^n$.
c) Найдите сумму коэффициентов при чётных степенях этих многочленов.

6. Решите задачи a) **3.** и b) **4.** другим способом.

7. a) $P(x) = (1 + x\sqrt{2})^{100}$. Докажите, что число $P(1) + P(-1)$ — целое.
b) Вычислите $C_{100}^0 + 3^2C_{100}^2 + \ldots + 3^{100}C_{100}^{100}$.
c*) Вычислите $C_{100}^0 + C_{100}^4 + \ldots + C_{100}^{100}$.
d*) Вычислите $C_{100}^0 + C_{100}^3 + \ldots + C_{100}^{99}$.