Многочлены–3: $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$**. 4 января**

1. Существует ли многочлен $P(x)$, такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ и $P(n)$ иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

2. Найдите все такие многочлены $p(x)$ с коэффициентом 1 при старшем члене, что $(x - 8)p(2x) = 8(x - 1)p(x)$. *Можно конечно обойтись без теории, но...*

3. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет 100 различных целых корней. Многочлен $Q(x)$ степени не ниже первой с целыми коэффициентами — делитель $P(x) + 2012$. Докажите, что степень $Q(x)$ не меньше 9.

4. При каких натуральных n существует многочлен P с целыми коэффициентами, имеющий n целых корней и при этом со свободным коэффициентом n?

5. Целые числа a, b, c таковы, что значения квадратных трёхчленов $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$ при $x = 1234$ совпадают. Может ли первый трёхчлен при $x = 1$ принимать значение 2009?

2.7. Пусть a, b, c — натуральные числа. Верно ли, что обязательно существует квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами, который в некоторых целых точках принимает значения a^3, b^3, c^3?

6. Графики двух квадратных трёхчленов пересекаются в точках A и B. Через вершину O первого из них проведены прямые OA и OB, которые пересекают второй график в точках C и D. Докажите, что прямая CD параллельна оси абсцисс. *Можно конечно обойтись без теории, но...*

7. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим через $n(P)$ количество решений уравнения $(P(x))^2 = 1$ в целых числах. Докажите, что $n(P) \leqslant \deg P + 2$.

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9-10 классы

Многочлены–3: $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$**. 4 января**

1. Существует ли многочлен $P(x)$, такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ и $P(n)$ иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

2. Найдите все такие многочлены $p(x)$ с коэффициентом 1 при старшем члене, что $(x - 8)p(2x) = 8(x - 1)p(x)$. *Можно конечно обойтись без теории, но...*

3. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет 100 различных целых корней. Многочлен $Q(x)$ степени не ниже первой с целыми коэффициентами — делитель $P(x) + 2012$. Докажите, что степень $Q(x)$ не меньше 9.

4. При каких натуральных n существует многочлен P с целыми коэффициентами, имеющий n целых корней и при этом со свободным коэффициентом n?

5. Целые числа a, b, c таковы, что значения квадратных трёхчленов $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$ при $x = 1234$ совпадают. Может ли первый трёхчлен при $x = 1$ принимать значение 2009?

2.7. Пусть a, b, c — натуральные числа. Верно ли, что обязательно существует квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами, который в некоторых целых точках принимает значения a^3, b^3, c^3?

6. Графики двух квадратных трёхчленов пересекаются в точках A и B. Через вершину O первого из них проведены прямые OA и OB, которые пересекают второй график в точках C и D. Докажите, что прямая CD параллельна оси абсцисс. *Можно конечно обойтись без теории, но...*

7. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим через $n(P)$ количество решений уравнения $(P(x))^2 = 1$ в целых числах. Докажите, что $n(P) \leqslant \deg P + 2$.