Многочлены–4: совпадения в многих точках. 4 января

1. Найдите все многочлены $P(x)$ такие, что $P(t+1) = P(t)$ для каждого действительного t.

2. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трёхчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трёхчлена.

3. Существует ли многочлен такой, что $P(n) = S(n)$ для каждого натурального n? Через $S(n)$ обозначена сумма цифр числа n.

4. Даны три квадратных многочлена с положительными старшими коэффициентами. Известно, что сумма любых двух имеет общий корень с третьим. Докажите, что все три многочлена имеют общий корень.

5. Существуют ли такая последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$ и такой непостоянный многочлен $P(x)$, что $a_m + a_n = P(mn)$ для любых натуральных m и n?

6. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

7. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 1$. На плоскости нарисовали графики $y = P(x)$ и $x = P(y)$, сдвинутые на некоторые векторы. Оказалось, что n из общих точек сдвинутых графиков лежат на прямой $y = x$. Докажите, что сдвинутые графики симметричны относительно этой прямой.

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9-10 классы

Многочлены–4: совпадения в многих точках. 4 января

1. Найдите все многочлены $P(x)$ такие, что $P(t+1) = P(t)$ для каждого действительного t.

2. На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трёхчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трёхчлена.

3. Существует ли многочлен такой, что $P(n) = S(n)$ для каждого натурального n? Через $S(n)$ обозначена сумма цифр числа n.

4. Даны три квадратных многочлена с положительными старшими коэффициентами. Известно, что сумма любых двух имеет общий корень с третьим. Докажите, что все три многочлена имеют общий корень.

5. Существуют ли такая последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$ и такой непостоянный многочлен $P(x)$, что $a_m + a_n = P(mn)$ для любых натуральных m и n?

6. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

7. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 1$. На плоскости нарисовали графики $y = P(x)$ и $x = P(y)$, сдвинутые на некоторые векторы. Оказалось, что n из общих точек сдвинутых графиков лежат на прямой $y = x$. Докажите, что сдвинутые графики симметричны относительно этой прямой.