Многочлены-5: интерполяция. 5 января

1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — попарно различные чисел.
a) Придумайте многочлен степени не выше $n-1$, который во всех точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, кроме x_k, равен 0, а в точке x_k равен 1.
b) Докажите, что для любых чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$ существует многочлен P степени не выше $n-1$ такой, что $P(x_i) = y_i$. *Указание: пункт а) или индукция по n.*
c) Пусть Q — другой многочлен такой, что $Q(x_i) = y_i$. Как связаны многочлены P и Q? Дополните фразу «многочлен P — … при делении многочлена Q на многочлен …». Докажите, что многочлен, описанный в пункте а), единственный.

2 (обрывки задач, не удивляйтесь простоте). a) Есть 25 футболистов, у каждого из них есть рейтинг $r_1, r_2, \ldots, r_{25}$, все рейтинги попарно различны. Тренер хочет выбрать из них в команду 11 любимчиков. Для этого он придумывает многочлен P, для каждого спортсмена вычисляет его *спортивный потенциал* $P(r_i)$ и выбирает игроков с максимальным потенциалом. Докажите, что ему хватит многочлена 24-ой степени.
b) На плоскости отмечены 2020 точек, их абсциссы различны, каждая из точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Скажем, что многочлен $P(x)$ *разделяет* эти точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот; на самом графике могут лежать точки обоих цветов. Докажите, что всегда можно построить разделяющий многочлен не выше 2018-й степени.

3. Докажите, что если многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения, то и все его коэффициенты рациональные.

4. Пусть a, b, c — целые числа. Докажите, что следующее число целое.

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}.$$

5. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени меньше чем n выполнено равенство $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k P(k) = 0$.

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9-10 классы

Многочлены-5: интерполяция. 5 января

1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — попарно различные чисел.
a) Придумайте многочлен степени не выше $n-1$, который во всех точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, кроме x_k, равен 0, а в точке x_k равен 1.
b) Докажите, что для любых чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$ существует многочлен P степени не выше $n-1$ такой, что $P(x_i) = y_i$. *Указание: пункт а) или индукция по n.*
c) Пусть Q — другой многочлен такой, что $Q(x_i) = y_i$. Как связаны многочлены P и Q? Дополните фразу «многочлен P — … при делении многочлена Q на многочлен …». Докажите, что многочлен, описанный в пункте а), единственный.

2 (обрывки задач, не удивляйтесь простоте). a) Есть 25 футболистов, у каждого из них есть рейтинг $r_1, r_2, \ldots, r_{25}$, все рейтинги попарно различны. Тренер хочет выбрать из них в команду 11 любимчиков. Для этого он придумывает многочлен P, для каждого спортсмена вычисляет его *спортивный потенциал* $P(r_i)$ и выбирает игроков с максимальным потенциалом. Докажите, что ему хватит многочлена 24-ой степени.
b) На плоскости отмечены 2020 точек, их абсциссы различны, каждая из точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Скажем, что многочлен $P(x)$ *разделяет* эти точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот; на самом графике могут лежать точки обоих цветов. Докажите, что всегда можно построить разделяющий многочлен не выше 2018-й степени.

3. Докажите, что если многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения, то и все его коэффициенты рациональные.

4. Пусть a, b, c — целые числа. Докажите, что следующее число целое.

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}.$$

5. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени меньше чем n выполнено равенство $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k P(k) = 0$.