Многочлены–6: многочлен большой. 5 января

1. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Подставим некоторое $t \neq 0$ и вынесем $a_n t^n$ за скобку:

$$a_n t^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n t} + \ldots + \frac{a_1}{a_n t^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n t^n}\right).$$

Докажите, что если $|t| > \max\left\{1, \frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|}{|a_n|}\right\}$, то вторая скобка положительна, т.е. числа $P(t)$ и $a_n t^n$ одного знака.

2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена, причём $\deg P > \deg Q$. Докажите, что
a) при всех достаточно больших $t \in \mathbb{R}$ выполнено $|P(t)| > |Q(t)|$.
b) при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $(1+1)^n > |P(n)|$.
c) при всех достаточно больших $t \in \mathbb{R}$ выполнено $(1+1)^t > |P(t)|$.

Факт (без доказательства). Пусть $P(x)$ — многочлен с положительным старшим коэффициентом, $\deg P > 0$. Тогда, начиная с некоторого момент он возрастает.

3. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, для которых неравенство $P(a-1)P(a+1) > P(a)^2 - 1$ выполнено при всех вещественных a.

4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел $a_1, a_2, \ldots$, такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_n.$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, \ldots$, каждый член меньше предыдущего.

5. Для некоторого многочлена существует бесконечное множество его значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных точках. Докажите, что существует не более одного целого значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке.

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9-10 классы

Многочлены–6: многочлен большой. 5 января

1. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Подставим некоторое $t \neq 0$ и вынесем $a_n t^n$ за скобку:

$$a_n t^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n t} + \ldots + \frac{a_1}{a_n t^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n t^n}\right).$$

Докажите, что если $|t| > \max\left\{1, \frac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|}{|a_n|}\right\}$, то вторая скобка положительна, т.е. числа $P(t)$ и $a_n t^n$ одного знака.

2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена, причём $\deg P > \deg Q$. Докажите, что
a) при всех достаточно больших $t \in \mathbb{R}$ выполнено $|P(t)| > |Q(t)|$.
b) при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполнено $(1+1)^n > |P(n)|$.
c) при всех достаточно больших $t \in \mathbb{R}$ выполнено $(1+1)^t > |P(t)|$.

Факт (без доказательства). Пусть $P(x)$ — многочлен с положительным старшим коэффициентом, $\deg P > 0$. Тогда, начиная с некоторого момент он возрастает.

3. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, для которых неравенство $P(a-1)P(a+1) > P(a)^2 - 1$ выполнено при всех вещественных a.

4. Бесконечная последовательность ненулевых чисел $a_1, a_2, \ldots$, такова, что при всех натуральных $n \geqslant 2018$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \ldots + a_n.$$

Докажите, что существует такое N, что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, \ldots$, каждый член меньше предыдущего.

5. Для некоторого многочлена существует бесконечное множество его значений, каждое из которых многочлен принимает по крайней мере в двух целочисленных точках. Докажите, что существует не более одного целого значения, которое многочлен принимает ровно в одной целой точке.