Многочлены–7: многочлены с целыми коэффициентами. 6 января

Главный факт. Пусть P — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда для любых целых чисел a и b число $P(a)-P(b)$ делится на $a-b$, другими словами, $P(a) \equiv P(b) \pmod{a-b}$.

1. Пусть P — многочлен с целыми коэффициентами. На его графике отмечены две точки A и B, все координаты которых — целые. Докажите, что если длина отрезка AB целая, то AB параллелен оси абсцисс.

2. Многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках равен ± 1. Докажите, что его нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

3. Докажите, что для любого непостоянного многочлена P с целыми коэффициентами найдётся такое натуральное число n, что $P(n)$ — составное число[1].

4. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1)+$ $+P(2)+\ldots+P(n)$ делится на k.

5. Найдите все натуральные $n>1$ такие, что существует различные целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$, для которых $P(x_1)=x_2$, $P(x_2)=x_3$, $\ldots$, $P(x_n)=x_1$.

6. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел n_1, n_2, $\ldots$, n_k, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

7. Непостоянный многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами таков, что для любых натуральных чисел n и k число

$$\frac{f(n+1)\cdot f(n+2)\cdot\ldots\cdot f(n+k)}{f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(k)} \text{ — целое.}$$

Докажите, что $f(0)=0$.

[1] давайте считать, что, возможно, отрицательное

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9-10 классы

Многочлены–7: многочлены с целыми коэффициентами. 6 января

Главный факт. Пусть P — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда для любых целых чисел a и b число $P(a)-P(b)$ делится на $a-b$, другими словами, $P(a) \equiv P(b) \pmod{a-b}$.

1. Пусть P — многочлен с целыми коэффициентами. На его графике отмечены две точки A и B, все координаты которых — целые. Докажите, что если длина отрезка AB целая, то AB параллелен оси абсцисс.

2. Многочлен седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках равен ± 1. Докажите, что его нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

3. Докажите, что для любого непостоянного многочлена P с целыми коэффициентами найдётся такое натуральное число n, что $P(n)$ — составное число[1].

4. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1)+$ $+P(2)+\ldots+P(n)$ делится на k.

5. Найдите все натуральные $n>1$ такие, что существует различные целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$, для которых $P(x_1)=x_2$, $P(x_2)=x_3$, $\ldots$, $P(x_n)=x_1$.

6. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел n_1, n_2, $\ldots$, n_k, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

7. Непостоянный многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами таков, что для любых натуральных чисел n и k число

$$\frac{f(n+1)\cdot f(n+2)\cdot\ldots\cdot f(n+k)}{f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(k)} \text{ — целое.}$$

Докажите, что $f(0)=0$.

[1] давайте считать, что, возможно, отрицательное