2. Выделение особых подмножеств, простого объекта. 10 января

1. *Диаметром* многоугольника называется наибольшее расстояние между его точками. Можно ли квадрат со стороной 1 разбить на три многоугольника, диаметр каждого из которых меньше 1?

2. Квадрат со стороной 1 разбит на две части. Докажите, что в одной из частей можно выбрать две точки, расстояние между которыми не меньше $\sqrt{5}/2$.

3. Из квадрата 35×35 вырезали 143 квадрата 2×2. Докажите, что можно выразать ещё один.

4. На плокости отмечены 64 точки в форме квадрата 8×8. Можно ли провести 13 прямых (не проходящих через точки) так, чтобы каждая точка лежала в своей собственной части?

5. В правильном десятиугольнике $A_1A_2A_3 \ldots A_{10}$ провели все диагонали. Около каждого пересечения двух или нескольких диагоналей (по внутренним точкам) поставлено число $+1$. Одной операцией можно изменить знак всех чисел, стоящих около точек пересечения с одной диагональю. Можно ли применением конечного числа таких операций изменить знаки у всех имеющихся чисел?

6. Правильный треугольник ABC полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками. Докажите, что треугольник ABC можно полностью покрыть четырьмя такими треугольниками. *Для решения этой задачи вам потребуется факт «Если внутри правильного треугольника со стороной a имеется отрезок длины b, то $a \geqslant b$» — он не является очевидным, его надо доказывать.*

7. Дан куб со стороной 4. Можно ли целиком оклеить три его грани, имеющие общую вершину, 16 бумажными прямоугольными полосками размера 1×3?

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9 класс

2. Выделение особых подмножеств, простого объекта. 10 января

1. Диаметром многоугольника называется наибольшее расстояние между его точками. Можно ли квадрат со стороной 1 разбить на три многоугольника, диаметр каждого из которых меньше 1?

2. Квадрат со стороной 1 разбит на две части. Докажите, что в одной из частей можно выбрать две точки, расстояние между которыми не меньше $\sqrt{5}/2$.

3. Из квадрата 35×35 вырезали 143 квадрата 2×2. Докажите, что можно выразать ещё один.

4. На плокости отмечены 64 точки в форме квадрата 8×8. Можно ли провести 13 прямых (не проходящих через точки) так, чтобы каждая точка лежала в своей собственной части?

5. В правильном десятиугольнике $A_1A_2A_3 \ldots A_{10}$ провели все диагонали. Около каждого пересечения двух или нескольких диагоналей (по внутренним точкам) поставлено число $+1$. Одной операцией можно изменить знак всех чисел, стоящих около точек пересечения с одной диагональю. Можно ли применением конечного числа таких операций изменить знаки у всех имеющихся чисел?

6. Правильный треугольник ABC полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками. Докажите, что треугольник ABC можно полностью покрыть четырьмя такими треугольниками. Для решения этой задачи вам потребуется факт «Если внутри правильного треугольника со стороной a имеется отрезок длины b, то $a \geqslant b$» — он не является очевидным, его надо доказывать.

7. Дан куб со стороной 4. Можно ли целиком оклеить три его грани, имеющие общую вершину, 16 бумажными прямоугольными полосками размера 1×3?