3. Дополнительные разбиения, классификации. 13 января

1. Числа от 1 до 500 разбиты на несколько групп. Известно, что если в группе хотя бы два числа, то сумма любых двух чисел из группы делится на 10. Какое наименьшее количество групп может быть?

2. Какое наибольшее количество прямых можно расположить на плоскости таким образом, чтобы среди любых 100 из них нашлись две прямые, образующие угол $60°$?

3. Плоскость разбита на одинаковые правильные треугольники, примыкающие друг к другу целыми сторонами. В одном из этих треугольников лежит фишка. Разрешается перекладывать фишку из треугольника, в котором она находится, в треугольник, имеющий с этим общую вершину и симметричный ему относительно этой вершины. Можно ли такими операциями переместить фишку в треугольник, имеющий с исходным общую сторону?

4. В фирме 99 сотрудников. Каждый отдыхает ровно 7 дней подряд в году, остальные дни работает. Докажите, что число дней, когда отдыхает нечётное число сотрудников, не менее 7.

5. Пусть $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — это k наименьших простых чисел ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ и т.д.), и $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Докажите, что среди чисел от 1 до N ровно $N/2$ делятся на нечётное число простых p_i, где $i \leqslant k$.

6. В таблице $2n \times 2n$ расставлены натуральные числа, не превосходящие 10. Известно, что числа, расположенные в клетках, имеющих общую сторону или вершину, взаимно просты. Докажите, что какое-то число встречается в таблице не менее чем $2n^2/3$ раз.

7. Среди вершин правильного 100-угольника отмечены 15. Докажите, что из них можно выбрать 4 так, что они лежат в вершинах трапеции или прямоугольника.

8. Для данного натурального n рассмотрим все перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чисел 1, 2, ..., n такие, что при всех натуральных $k \leqslant n$ число ka_k является точным квадратом. При каком наименьшем n количество таких перестановок делится на 1526?

Не забудьте перевернуть листочек!

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9 класс

3. Дополнительные разбиения, классификации. 13 января

1. Числа от 1 до 500 разбиты на несколько групп. Известно, что если в группе хотя бы два числа, то сумма любых двух чисел из группы делится на 10. Какое наименьшее количество групп может быть?

2. Какое наибольшее количество прямых можно расположить на плоскости таким образом, чтобы среди любых 100 из них нашлись две прямые, образующие угол $60°$?

3. Плоскость разбита на одинаковые правильные треугольники, примыкающие друг к другу целыми сторонами. В одном из этих треугольников лежит фишка. Разрешается перекладывать фишку из треугольника, в котором она находится, в треугольник, имеющий с этим общую вершину и симметричный ему относительно этой вершины. Можно ли такими операциями переместить фишку в треугольник, имеющий с исходным общую сторону?

4. В фирме 99 сотрудников. Каждый отдыхает ровно 7 дней подряд в году, остальные дни работает. Докажите, что число дней, когда отдыхает нечётное число сотрудников, не менее 7.

5. Пусть $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — это k наименьших простых чисел ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ и т.д.), и $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Докажите, что среди чисел от 1 до N ровно $N/2$ делятся на нечётное число простых p_i, где $i \leqslant k$.

6. В таблице $2n \times 2n$ расставлены натуральные числа, не превосходящие 10. Известно, что числа, расположенные в клетках, имеющих общую сторону или вершину, взаимно просты. Докажите, что какое-то число встречается в таблице не менее чем $2n^2/3$ раз.

7. Среди вершин правильного 100-угольника отмечены 15. Докажите, что из них можно выбрать 4 так, что они лежат в вершинах трапеции или прямоугольника.

8. Для данного натурального n рассмотрим все перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чисел 1, 2, ..., n такие, что при всех натуральных $k \leqslant n$ число ka_k является точным квадратом. При каком наименьшем n количество таких перестановок делится на 1526?

Не забудьте перевернуть листочек!

9. На клетчатую доску 100×100 положили по клеткам 800 неперекрывающихся L-тетрамино (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Докажите, что на доску можно положить ещё одно L-тетрамино так, чтобы оно не перекрывалось с остальными.

10. Чернопольный «слонёнок» за один ход передвигается на одну клетку по диагонали. Найдите наименьшее число ходов, за которые «слонёнок» может обойти все чёрные поля доски 8×8.

9. На клетчатую доску 100×100 положили по клеткам 800 неперекрывающихся L-тетрамино (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Докажите, что на доску можно положить ещё одно L-тетрамино так, чтобы оно не перекрывалось с остальными.

10. Чернопольный «слонёнок» за один ход передвигается на одну клетку по диагонали. Найдите наименьшее число ходов, за которые «слонёнок» может обойти все чёрные поля доски 8×8.