5. «Можно считать, что...». 18 января

Упражнение 1. На складе лежат 300 сапог: 100 резиновых, 100 кирзовых, 100 яловых. Среди них поровну левых и правых. Мы хотим доказать, что из имеющихся сапогов можно составить 50 правильных пар.
a) Попробуем выкинуть один левый резиновый сапог. Что нужно сделать, чтобы при этом не изменилось условие про количества сапог? Когда при такой операции не увеличивается количество пар, которые мы можем составить?
b) Будем проделывать операции из пункта a), которые не увеличивают количество пар, которые мы можем составить, пока можем. Когда мы не сможем их больше делать? Можно ещё поделать аналогичные операции с оставшимися сапогами. Только теперь решите задачу.

Упражнение 2. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше 2/5. Мы хотим доказать, что во всём классе мальчиков не больше 4/7.
a) Как меняются доли мальчиков и девочек в походах, если мы их добавляем или убираем из похода? Что тогда можно считать про каждого мальчика? А про каждую девочку?
b) Как меняется доля мальчиков в классе, если добавить в него мальчика? Докажите, что можно считать, что мальчиков в походы ходило поровну. Только теперь решите задачу.
c)[1] Как можно поступить, чтобы можно было считать, что количество девочек делится на 3? Добавьте ещё немного мальчиков, чтобы считать, что доля мальчиков в походе ровно 2/5. Только теперь решите задачу.

1. Число 2020 представили в виде суммы нескольких натуральных чисел. Какое наибольшее произведение могут иметь эти числа?

2. Внутри одного выпуклого многоугольника находится другой. Докажите, что периметр внутреннего меньше.

3. Для неотрицательных чисел x, y и z докажите неравенство

$$\min\{(x-y)^2,(y-z)^2,(z-x)^2\} \leqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

Не забудьте перевернуть листочек!

[1] А вы думали, что надо просто решить задачу?

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9 класс

5. «Можно считать, что...». 18 января

Упражнение 1. На складе лежат 300 сапог: 100 резиновых, 100 кирзовых, 100 яловых. Среди них поровну левых и правых. Мы хотим доказать, что из имеющихся сапогов можно составить 50 правильных пар.
a) Попробуем выкинуть один левый резиновый сапог. Что нужно сделать, чтобы при этом не изменилось условие про количества сапог? Когда при такой операции не увеличивается количество пар, которые мы можем составить?
b) Будем проделывать операции из пункта a), которые не увеличивают количество пар, которые мы можем составить, пока можем. Когда мы не сможем их больше делать? Можно ещё поделать аналогичные операции с оставшимися сапогами. Только теперь решите задачу.

Упражнение 2. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше 2/5. Мы хотим доказать, что во всём классе мальчиков не больше 4/7.
a) Как меняются доли мальчиков и девочек в походах, если мы их добавляем или убираем из похода? Что тогда можно считать про каждого мальчика? А про каждую девочку?
b) Как меняется доля мальчиков в классе, если добавить в него мальчика? Докажите, что можно считать, что мальчиков в походы ходило поровну. Только теперь решите задачу.
c)[1] Как можно поступить, чтобы можно было считать, что количество девочек делится на 3? Добавьте ещё немного мальчиков, чтобы считать, что доля мальчиков в походе ровно 2/5. Только теперь решите задачу.

1. Число 2020 представили в виде суммы нескольких натуральных чисел. Какое наибольшее произведение могут иметь эти числа?

2. Внутри одного выпуклого многоугольника находится другой. Докажите, что периметр внутреннего меньше.

3. Для неотрицательных чисел x, y и z докажите неравенство

$$\min\{(x-y)^2,(y-z)^2,(z-x)^2\} \leqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

Не забудьте перевернуть листочек!

[1] А вы думали, что надо просто решить задачу?

4. Алфавит некоторого языка состоит из n букв. Известно, что ни одно слово не является началом другого. a_k — число слов языка, состоящих из k букв. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k} \leqslant 1.$$

5. Внутри правильного 2021-угольника взята точка. Все её проекции на стороны попали во внутренние точки сторон и (вместе с вершинами) разбили периметр на 4042 отрезка. Докажите, что сумма длин отрезков через один равна полупериметру 2021-угольника.

6. Десять человек решили сдать в общую кассу по 30 форинтов. К сожалению, у них были только купюры по 20, 50, 100 и 500 форинтов. Тем не менее, каждый отдал ровно по 30 форинтов. Какая наименьшая сумма денег могла быть у всех десяти вместе?

7. Есть связный граф с чётным числом вершин. Докажите, что можно выкинуть несколько рёбер так, чтобы в оставшемся графе степень каждой вершины была бы нечётной.

4. Алфавит некоторого языка состоит из n букв. Известно, что ни одно слово не является началом другого. a_k — число слов языка, состоящих из k букв. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k} \leqslant 1.$$

5. Внутри правильного 2021-угольника взята точка. Все её проекции на стороны попали во внутренние точки сторон и (вместе с вершинами) разбили периметр на 4042 отрезка. Докажите, что сумма длин отрезков через один равна полупериметру 2021-угольника.

6. Десять человек решили сдать в общую кассу по 30 форинтов. К сожалению, у них были только купюры по 20, 50, 100 и 500 форинтов. Тем не менее, каждый отдал ровно по 30 форинтов. Какая наименьшая сумма денег могла быть у всех десяти вместе?

7. Есть связный граф с чётным числом вершин. Докажите, что можно выкинуть несколько рёбер так, чтобы в оставшемся графе степень каждой вершины была бы нечётной.