1. Принцип крайнего. 9 января

Мысль. В задачах, где надо что-то найти, нужным свойством часто обладает крайний (наибольший, наименьший, самый левый) объект.

Мысль. В задачах на доказательство часто полезно начать рассуждение с рассмотрения крайнего объекта (или объектов).

1. По окружности расставлено несколько натуральных чисел так, что каждое из них является делителем одного из соседних. Докажите, что среди этих чисел есть два одинаковых.

2. На доске 100×100 стоит несколько ферзей. Докажите, что есть ферзь, бьющий не более четырех других. Сквозь друг друга ферзи не бьют.

3. a) На бесконечную клетчатую плоскость расставлены натуральные числа, каждое из которых равно среднему арифметическому своих четырёх соседей. Докажите, что все числа равны.
b) А если числа целые?

4. Докажите, что у выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым количеством ребер.

5. Можно ли на шахматную доску положить несколько тетраминошек в форме буквы S так, чтобы каждая клетка была бы покрыта одинаковым количеством тетраминошек? Тетраминошки не выспупают за пределы доски.

6. Найдите все неотрицательные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, удовлетворяющие равенствам:

$$x_1 + x_2 = x_3^2;$$
$$x_2 + x_3 = x_4^2;$$
$$x_3 + x_4 = x_5^2;$$
$$x_4 + x_5 = x_1^2;$$
$$x_5 + x_1 = x_2^2.$$

7. Десять королей обошли всю доску и вернулись в исходные клетки. Каждый король побывал ровно один раз на каждой клетке. Докажите, что был момент, когда каждый король был не на своем месте. За ход ровно один король ходит на соседнюю по стороне или диагонали клетку.

Не забудьте перевернуть листочек!

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9 класс

1. Принцип крайнего. 9 января

Мысль. В задачах, где надо что-то найти, нужным свойством часто обладает крайний (наибольший, наименьший, самый левый) объект.

Мысль. В задачах на доказательство часто полезно начать рассуждение с рассмотрения крайнего объекта (или объектов).

1. По окружности расставлено несколько натуральных чисел так, что каждое из них является делителем одного из соседних. Докажите, что среди этих чисел есть два одинаковых.

2. На доске 100×100 стоит несколько ферзей. Докажите, что есть ферзь, бьющий не более четырех других. Сквозь друг друга ферзи не бьют.

3. a) На бесконечную клетчатую плоскость расставлены натуральные числа, каждое из которых равно среднему арифметическому своих четырёх соседей. Докажите, что все числа равны.
b) А если числа целые?

4. Докажите, что у выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым количеством ребер.

5. Можно ли на шахматную доску положить несколько тетраминошек в форме буквы S так, чтобы каждая клетка была бы покрыта одинаковым количеством тетраминошек? Тетраминошки не выспупают за пределы доски.

6. Найдите все неотрицательные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, удовлетворяющие равенствам:

$$x_1 + x_2 = x_3^2;$$
$$x_2 + x_3 = x_4^2;$$
$$x_3 + x_4 = x_5^2;$$
$$x_4 + x_5 = x_1^2;$$
$$x_5 + x_1 = x_2^2.$$

7. Десять королей обошли всю доску и вернулись в исходные клетки. Каждый король побывал ровно один раз на каждой клетке. Докажите, что был момент, когда каждый король был не на своем месте. За ход ровно один король ходит на соседнюю по стороне или диагонали клетку.

Не забудьте перевернуть листочек!

8. На доску выписаны 2021 число. Оказалось, что сумма каждых трёх выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?

9. Известно, что если у двух жителей деревни поровну знакомых среди односельчан, то общих знакомых у них нет. Докажите, что найдётся житель, у которого ровно один знакомый односельчанин.

10. На плоскости дано 30000 окружностей единичного радиуса. Докажите, что из них можно выбрать или 100 окружностей, никакие две из которых не пересекаются, или 100 окружностей, любые две из которых пересекаются. (Окружности считаем пересекающимися, если они имеют хотя бы одну общую точку.)

8. На доску выписаны 2021 число. Оказалось, что сумма каждых трёх выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?

9. Известно, что если у двух жителей деревни поровну знакомых среди односельчан, то общих знакомых у них нет. Докажите, что найдётся житель, у которого ровно один знакомый односельчанин.

10. На плоскости дано 30000 окружностей единичного радиуса. Докажите, что из них можно выбрать или 100 окружностей, никакие две из которых не пересекаются, или 100 окружностей, любые две из которых пересекаются. (Окружности считаем пересекающимися, если они имеют хотя бы одну общую точку.)