2. Выделение особых подмножеств, простого объекта. 11 января

1. *Диаметром* многоугольника называется наибольшее расстояние между его точками. Можно ли квадрат со стороной 1 разбить на три многоугольника, диаметр каждого из которых меньше 1?

2. Каждая точка квадрата со стороной 1 отнесена к одной из двух частей. Докажите, что в одной из частей можно выбрать две точки, расстояние между которыми не меньше $\sqrt{5}/2$.

3. Из квадрата 35×35 вырезали 143 квадрата 2×2. Докажите, что можно выразать ещё один.

4. На плокости отмечены 64 точки в форме квадрата 8×8. Можно ли провести 13 прямых (не проходящих через точки) так, чтобы каждая точка лежала в своей собственной части?

5. В правильном десятиугольнике $A_1A_2A_3\ldots A_{10}$ провели все диагонали. Около каждого пересечения двух или нескольких диагоналей (по внутренним точкам) поставлено число $+1$. Одной операцией можно изменить знак всех чисел, стоящих около точек пересечения с одной диагональю. Можно ли применением конечного числа таких операций изменить знаки у всех имеющихся чисел?

6. Круг радиуса 1 покрыт семью одинаковыми кругами. Докажите, что их радиус не меньше $1/2$. *Для решения этой задачи вам потребуется факт «Если внутри круга окружности радиуса a имеется отрезок длины b, то $2a \geqslant b$» — он не является очевидным, его надо доказывать.*

7. На доске 11×11 разложены двусторонние фишки, одна сторона которой — белая, а другая — чёрная. Изначальное все фишки лежат белой стороной вверх. За один ход разрешается выбрать одну строчку или один столбец и перевернуть все фишки этой линии. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы ровно в одной клетке фишка лежала чёрной стороной вверх?

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9 класс

2. Выделение особых подмножеств, простого объекта. 11 января

1. *Диаметром* многоугольника называется наибольшее расстояние между его точками. Можно ли квадрат со стороной 1 разбить на три многоугольника, диаметр каждого из которых меньше 1?

2. Каждая точка квадрата со стороной 1 отнесена к одной из двух частей. Докажите, что в одной из частей можно выбрать две точки, расстояние между которыми не меньше $\sqrt{5}/2$.

3. Из квадрата 35×35 вырезали 143 квадрата 2×2. Докажите, что можно выразать ещё один.

4. На плокости отмечены 64 точки в форме квадрата 8×8. Можно ли провести 13 прямых (не проходящих через точки) так, чтобы каждая точка лежала в своей собственной части?

5. В правильном десятиугольнике $A_1A_2A_3\ldots A_{10}$ провели все диагонали. Около каждого пересечения двух или нескольких диагоналей (по внутренним точкам) поставлено число $+1$. Одной операцией можно изменить знак всех чисел, стоящих около точек пересечения с одной диагональю. Можно ли применением конечного числа таких операций изменить знаки у всех имеющихся чисел?

6. Круг радиуса 1 покрыт семью одинаковыми кругами. Докажите, что их радиус не меньше $1/2$. *Для решения этой задачи вам потребуется факт «Если внутри круга окружности радиуса a имеется отрезок длины b, то $2a \geqslant b$» — он не является очевидным, его надо доказывать.*

7. На доске 11×11 разложены двусторонние фишки, одна сторона которой — белая, а другая — чёрная. Изначальное все фишки лежат белой стороной вверх. За один ход разрешается выбрать одну строчку или один столбец и перевернуть все фишки этой линии. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы ровно в одной клетке фишка лежала чёрной стороной вверх?