5. «Можно считать, что...». 19 января

1. Число 2020 представили в виде суммы нескольких натуральных чисел. Мы хотим понять, какое наибольшее произведение могут иметь эти числа.
a) Поймите, что в оптимальном примере нет 1.
b) Поймите, что в оптимальном примере нет чисел $\geqslant 5$.
c) Поймите, что можно считать, что в оптимальном примере нет 4.
d) $2+2+2=3+3$. Что из этого следует для оптимального примера? Решите задачу.

2. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше $2/5$. Мы хотим доказать, что во всём классе мальчиков не больше $4/7$.
a) Как меняются доли мальчиков и девочек в походах, если мы их добавляем или убираем из похода? Что тогда можно считать про каждого мальчика? А про каждую девочку?
b) Как меняется доля мальчиков в классе, если добавить в него мальчика? Докажите, что можно считать, что мальчиков в походы ходило поровну. Попробуйте теперь решить задачу.
c)[1] Как можно поступить, чтобы можно было считать, что количество девочек делится на 3? Добавьте ещё немного мальчиков, чтобы считать, что доля мальчиков в походе ровно $2/5$. Теперь решите задачу.

3. На складе лежат 300 сапог: 100 резиновых, 100 кирзовых, 100 яловых. Среди них поровну левых и правых. Мы хотим доказать, что из имеющихся сапогов можно составить 50 правильных пар.
a) Попробуем выкинуть один левый резиновый сапог. Что нужно сделать, чтобы при этом не изменилось условие про количества сапог? При каком условии на количество резиновых сапог при такой операции не увеличивается количество пар, которые мы можем составить?
b) Будем проделывать операции из пункта а), которые не увеличивают количество пар, которые мы можем составить, пока можем. Когда мы не сможем их больше делать? Можно ещё поделать аналогичные операции с оставшимися сапогами. Только теперь решите задачу.

Не забудьте перевернуть листочек!

[1] А вы думали, что надо просто решить задачу?

«Сириус», январская математическая программа – 2022, 9 класс

5. «Можно считать, что...». 19 января

1. Число 2020 представили в виде суммы нескольких натуральных чисел. Мы хотим понять, какое наибольшее произведение могут иметь эти числа.
a) Поймите, что в оптимальном примере нет 1.
b) Поймите, что в оптимальном примере нет чисел $\geqslant 5$.
c) Поймите, что можно считать, что в оптимальном примере нет 4.
d) $2+2+2=3+3$. Что из этого следует для оптимального примера? Решите задачу.

2. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше $2/5$. Мы хотим доказать, что во всём классе мальчиков не больше $4/7$.
a) Как меняются доли мальчиков и девочек в походах, если мы их добавляем или убираем из похода? Что тогда можно считать про каждого мальчика? А про каждую девочку?
b) Как меняется доля мальчиков в классе, если добавить в него мальчика? Докажите, что можно считать, что мальчиков в походы ходило поровну. Попробуйте теперь решить задачу.
c)[1] Как можно поступить, чтобы можно было считать, что количество девочек делится на 3? Добавьте ещё немного мальчиков, чтобы считать, что доля мальчиков в походе ровно $2/5$. Теперь решите задачу.

3. На складе лежат 300 сапог: 100 резиновых, 100 кирзовых, 100 яловых. Среди них поровну левых и правых. Мы хотим доказать, что из имеющихся сапогов можно составить 50 правильных пар.
a) Попробуем выкинуть один левый резиновый сапог. Что нужно сделать, чтобы при этом не изменилось условие про количества сапог? При каком условии на количество резиновых сапог при такой операции не увеличивается количество пар, которые мы можем составить?
b) Будем проделывать операции из пункта а), которые не увеличивают количество пар, которые мы можем составить, пока можем. Когда мы не сможем их больше делать? Можно ещё поделать аналогичные операции с оставшимися сапогами. Только теперь решите задачу.

Не забудьте перевернуть листочек!

[1] А вы думали, что надо просто решить задачу?

4. Внутри выпуклого многоугольника P находится другой Q. Мы хотим доказать, что периметр внутреннего меньше.
a) Будем «тянуть» вершины Q на границу P: например, можно это делать вдоль прямой, содержащей сторону Q. Что может пойти не так в таком процессе? Помните: нам важно, чтобы Q оставался выпуклым.
b) Почему процесс такого перетягивания рано или поздно приведёт все вершины Q на границу P? Решите задачу.

5. Для неотрицательных чисел x, y и z докажите неравенство

$$\min\{(x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2\} \leqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

6. Алфавит некоторого языка состоит из n букв. Известно, что ни одно слово не является началом другого. a_k — число слов языка, состоящих из k букв. Докажите, что

$$\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_{10^6}}{n^{10^6}} \leqslant 1.$$

7. Десять человек решили сдать в общую кассу по 30 форинтов. К сожалению, у них были только купюры по 20, 50, 100 и 500 форинтов. Тем не менее, каждый отдал ровно по 30 форинтов. Какая наименьшая сумма денег могла быть у всех десяти вместе?

4. Внутри выпуклого многоугольника P находится другой Q. Мы хотим доказать, что периметр внутреннего меньше.
a) Будем «тянуть» вершины Q на границу P: например, можно это делать вдоль прямой, содержащей сторону Q. Что может пойти не так в таком процессе? Помните: нам важно, чтобы Q оставался выпуклым.
b) Почему процесс такого перетягивания рано или поздно приведёт все вершины Q на границу P? Решите задачу.

5. Для неотрицательных чисел x, y и z докажите неравенство

$$\min\{(x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2\} \leqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

6. Алфавит некоторого языка состоит из n букв. Известно, что ни одно слово не является началом другого. a_k — число слов языка, состоящих из k букв. Докажите, что

$$\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_{10^6}}{n^{10^6}} \leqslant 1.$$

7. Десять человек решили сдать в общую кассу по 30 форинтов. К сожалению, у них были только купюры по 20, 50, 100 и 500 форинтов. Тем не менее, каждый отдал ровно по 30 форинтов. Какая наименьшая сумма денег могла быть у всех десяти вместе?