«Можно считать, что...» и последовательные улучшения. 2 июня

Пример. На складе лежат 300 сапог: 100 резиновых, 100 кирзовых, 100 яловых. Среди них поровну левых и правых. Докажите, что из имеющихся сапогов можно составить 50 правильных пар.

1. Число 2020 представили в виде суммы нескольких натуральных чисел. Какое наибольшее произведение могут иметь эти числа?

2. Для неотрицательных чисел x, y и z докажите неравенство

$$\min\{(x-y)^2,(y-z)^2,(z-x)^2\} \leqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

Решения, не использующие ни раз последовательные улучшения, не принимаются: смысл не в том, чтобы решить неравенство.

3. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше $2/5$. Докажите, что во всём классе мальчиков не больше $4/7$. *Принимаются только решения, использующие не более двух переменных, лучше вообще одной.*

4. Алфавит некоторого языка состоит из n букв. Известно, что ни одно слово не является началом другого. a_k — число слов языка, состоящих из k букв. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k} \leqslant 1$.

5. Внутри одного выпуклого многоугольника находится другой выпуклый многоугольник. Докажите, что периметр внутреннего не больше периметра внешнего.

6. Внутри правильного n-угольника взята точка. Все её проекции на стороны попали во внутренние точки сторон и (вместе с вершинами) разбили периметр на $2n$ отрезков. Докажите, что сумма длин отрезков через один равна полупериметру n-угольника. *Решение, не использующее последовательные улучшения, в кондуите отмечается как 0.*

7. Десять человек решили сдать в общую кассу по 30 форинтов. К сожалению, у них были только купюры по 20, 50, 100 и 500 форинтов. Тем не менее, каждый отдал ровно по 30 форинтов. Какая наименьшая сумма денег могла быть у всех десяти вместе?

8. В связном графе чётное число вершин. Докажите, что можно убрать из него часть рёбер так, что степень каждой вершины станет нечётной.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2–Э3

«Можно считать, что...» и последовательные улучшения. 2 июня

Пример. На складе лежат 300 сапог: 100 резиновых, 100 кирзовых, 100 яловых. Среди них поровну левых и правых. Докажите, что из имеющихся сапогов можно составить 50 правильных пар.

1. Число 2020 представили в виде суммы нескольких натуральных чисел. Какое наибольшее произведение могут иметь эти числа?

2. Для неотрицательных чисел x, y и z докажите неравенство

$$\min\{(x-y)^2,(y-z)^2,(z-x)^2\} \leqslant \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

Решения, не использующие ни раз последовательные улучшения, не принимаются: смысл не в том, чтобы решить неравенство.

3. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше $2/5$. Докажите, что во всём классе мальчиков не больше $4/7$. Принимаются только решения, использующие не более двух переменных, лучше вообще одной.

4. Алфавит некоторого языка состоит из n букв. Известно, что ни одно слово не является началом другого. a_k — число слов языка, состоящих из k букв. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{n^k} \leqslant 1$.

5. Внутри одного выпуклого многоугольника находится другой выпуклый многоугольник. Докажите, что периметр внутреннего не больше периметра внешнего.

6. Внутри правильного n-угольника взята точка. Все её проекции на стороны попали во внутренние точки сторон и (вместе с вершинами) разбили периметр на $2n$ отрезков. Докажите, что сумма длин отрезков через один равна полупериметру n-угольника. Решение, не использующее последовательные улучшения, в кондуите отмечается как 0.

7. Десять человек решили сдать в общую кассу по 30 форинтов. К сожалению, у них были только купюры по 20, 50, 100 и 500 форинтов. Тем не менее, каждый отдал ровно по 30 форинтов. Какая наименьшая сумма денег могла быть у всех десяти вместе?

8. В связном графе чётное число вершин. Докажите, что можно убрать из него часть рёбер так, что степень каждой вершины станет нечётной.