

Меняем правила игры. 4 июня

Пример. По шнуру длиной 1 м ползёт червяк со скоростью 1 см/мин. Раз в минуту мальчик Вася растягивает шнур так, что он становится на 1 м длиннее. Доползёт ли червяк до конца шнура?

1. В колонию из 1000 бактерий попал вирус. Каждую секунду каждый вирус уничтожает одну бактерию, после чего все бактерии и все вирусы делятся пополам. Докажите, что рано или поздно все бактерии будут уничтожены, и выясните, когда это произойдет.

2. На палочке длины 1 м сидят n муравьёв, каждый смотрит или влево, или вправо. В какой-то момент все они начинают ползти со скоростью 1 м в минуту. Если муравей доходит до конца палки, он с неё падает. Если два муравья, движущиеся в разных направлениях, сталкиваются, они оба разворачиваются и продолжают двигаться с той же скоростью, но уже в противоположных направлениях. Докажите, что через 1 минуту на палке не останется муравьёв.

3. Мастер хочет сделать орган из 17 труб различной длины. Утром первого января ему привезли 17 одинаковых по длине труб. За один день он может обработать любые 13 труб, укоротив каждую их них на 1 см. Сможет ли он изготовить орган к вечеру 30 января? *Наверное, можно рассказать то же самое решение и без изменений правил, но попробуйте всё же с ними.*

4. В 9 ячейках записаны числа: в первой — единица, в остальных — нули. За одну операцию можно выбрать две ячейки и заменить каждое число в них полусуммой этих чисел. Какое наименьшее число можно получить в первой ячейке? *Не надо приходить сдавать, если ваше решение — скучное объяснение оптимальности какого-то алгоритма.*

5. Двое играющих по очереди передвигают каждый свою фишку на шахматной доске 100×100 , каждым ходом — на соседнее по стороне поле. Первый выигрывает, если после его хода станут перпендикулярными отрезки, соединяющие центры занятых фишками клеток с центром доски. Докажите, что если вначале фишки стояли в противоположных углах доски, то первый может выиграть независимо от игры второго.

Меняем правила игры. 4 июня

Пример. По шнуру длиной 1 м ползёт червяк со скоростью 1 см/мин. Раз в минуту мальчик Вася растягивает шнур так, что он становится на 1 м длиннее. Доползёт ли червяк до конца шнура?

1. В колонию из 1000 бактерий попал вирус. Каждую секунду каждый вирус уничтожает одну бактерию, после чего все бактерии и все вирусы делятся пополам. Докажите, что рано или поздно все бактерии будут уничтожены, и выясните, когда это произойдет.

2. На палочке длины 1 м сидят n муравьёв, каждый смотрит или влево, или вправо. В какой-то момент все они начинают ползти со скоростью 1 м в минуту. Если муравей доходит до конца палки, он с неё падает. Если два муравья, движущиеся в разных направлениях, сталкиваются, они оба разворачиваются и продолжают двигаться с той же скоростью, но уже в противоположных направлениях. Докажите, что через 1 минуту на палке не останется муравьёв.

3. Мастер хочет сделать орган из 17 труб различной длины. Утром первого января ему привезли 17 одинаковых по длине труб. За один день он может обработать любые 13 труб, укоротив каждую их них на 1 см. Сможет ли он изготовить орган к вечеру 30 января? *Наверное, можно рассказать то же самое решение и без изменений правил, но попробуйте всё же с ними.*

4. В 9 ячейках записаны числа: в первой — единица, в остальных — нули. За одну операцию можно выбрать две ячейки и заменить каждое число в них полусуммой этих чисел. Какое наименьшее число можно получить в первой ячейке? *Не надо приходить сдавать, если ваше решение — скучное объяснение оптимальности какого-то алгоритма.*

5. Двое играющих по очереди передвигают каждый свою фишку на шахматной доске 100×100 , каждым ходом — на соседнее по стороне поле. Первый выигрывает, если после его хода станут перпендикулярными отрезки, соединяющие центры занятых фишками клеток с центром доски. Докажите, что если вначале фишки стояли в противоположных углах доски, то первый может выиграть независимо от игры второго.

6. Имеется доска 100×100 . В некоторых узлах этой доски сидит по муравью. В какой-то момент все они начинают ползти со скоростью 1, параллельно одному из краёв доски. Если два муравья, движущиеся в противоположных направлениях, сталкиваются, они оба поворачивают на 90° по часовой стрелке и продолжают ползти. Если сталкиваются больше чем два муравья, или если сталкиваются муравьи, ползущие в перпендикулярных направлениях, они не меняют своих направлений. Если муравей должен выйти за край доски, то он с неё падает. Докажите, что через 150 минут ни одного муравья на доске не останется. *Оценка точная: пример на 150 минут существует.*

7. Клара разложила в ряд n карточек, на которых написаны числа от 1 до n . Пара карточек образует *инверсию*, если карточка с большим из двух номеров лежит левее карточки с меньшим номером. Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было слева от неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь столько карточек стало от неё справа. Дальше он проделывает это по очереди с карточками 2, 3, \dots , n . Докажите, что после действий Карла количество инверсий не изменится.

6. Имеется доска 100×100 . В некоторых узлах этой доски сидит по муравью. В какой-то момент все они начинают ползти со скоростью 1, параллельно одному из краёв доски. Если два муравья, движущиеся в противоположных направлениях, сталкиваются, они оба поворачивают на 90° по часовой стрелке и продолжают ползти. Если сталкиваются больше чем два муравья, или если сталкиваются муравьи, ползущие в перпендикулярных направлениях, они не меняют своих направлений. Если муравей должен выйти за край доски, то он с неё падает. Докажите, что через 150 минут ни одного муравья на доске не останется. *Оценка точная: пример на 150 минут существует.*

7. Клара разложила в ряд n карточек, на которых написаны числа от 1 до n . Пара карточек образует *инверсию*, если карточка с большим из двух номеров лежит левее карточки с меньшим номером. Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было слева от неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь столько карточек стало от неё справа. Дальше он проделывает это по очереди с карточками 2, 3, \dots , n . Докажите, что после действий Карла количество инверсий не изменится.