Индукция: ослабление условий. 7 июня

1. Докажите, что правильный $2n$-угольник можно разбить на ромбы.

2. На двух параллельных прямых отмечено по 40 точек. Их разбивают на 40 пар так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. (В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке.) Докажите, что число способов это сделать меньше 3^{39}.

3. На координатной плоскости отмечены все точки (x, y), что x, $y \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Кроме того, на плоскости проведены несколько прямых, на которых лежат все отмеченные точки, кроме точки $(0, 0)$. Докажите, что проведено как минимум $2n$ прямых.

4. Последовательность Фибоначчи задаётся условиями $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ для всех $n \geqslant 2$. Докажите, что для каждого натурального n выполнено равенство $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$.

5. Дано множество S из последовательностей длины 100, состоящих из нулей и единиц. Оказалось, что для каждого элемента S есть ровно 20 других элементов в S, отличающихся от него ровно в одном разряде. Какое наименьшее количество элементов может быть в множестве S?

6. В 100 коробках, стоящих в ряд, лежит суммарно 10000 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 99 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.

7. В клетках доски 100×100 расставлены 100^2 различных чисел. В каждой строчке и в каждом столбце подчёркнуты по 25 наибольших чисел. Докажите, что хотя бы 25^2 чисел подчёркнуты дважды.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа, Э2–Э3

Индукция: ослабление условий. 7 июня

1. Докажите, что правильный $2n$-угольник можно разбить на ромбы.

2. На двух параллельных прямых отмечено по 40 точек. Их разбивают на 40 пар так, чтобы отрезки, соединяющие точки в одной паре, не пересекались друг с другом. (В частности, конец одного из отрезков не может лежать на другом отрезке.) Докажите, что число способов это сделать меньше 3^{39}.

3. На координатной плоскости отмечены все точки (x, y), что x, $y \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Кроме того, на плоскости проведены несколько прямых, на которых лежат все отмеченные точки, кроме точки $(0, 0)$. Докажите, что проведено как минимум $2n$ прямых.

4. Последовательность Фибоначчи задаётся условиями $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ для всех $n \geqslant 2$. Докажите, что для каждого натурального n выполнено равенство $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$.

5. Дано множество S из последовательностей длины 100, состоящих из нулей и единиц. Оказалось, что для каждого элемента S есть ровно 20 других элементов в S, отличающихся от него ровно в одном разряде. Какое наименьшее количество элементов может быть в множестве S?

6. В 100 коробках, стоящих в ряд, лежит суммарно 10000 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 99 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.

7. В клетках доски 100×100 расставлены 100^2 различных чисел. В каждой строчке и в каждом столбце подчёркнуты по 25 наибольших чисел. Докажите, что хотя бы 25^2 чисел подчёркнуты дважды.